

PRINSIP-PRINSIP UNTUK KEMUNGKINAN

Raol Mukarrozi

Logika dan metamaika

29 May 2026

ABSTRAK

Logika modal mengkaji modalitas seperti kemungkinan (possibility) dan keharusan (necessity) dalam kerangka formal. Makalah ini mengeksplorasi prinsip-prinsip fundamental yang mengatur operator kemungkinan dalam berbagai sistem logika modal, mulai dari sistem K yang paling dasar hingga sistem S5 yang paling kuat, serta logika modal alternatif seperti logika modal epistemik, deontik, dan temporal. Kami menelaah aksioma-aksioma yang mendefinisikan perilaku operator kemungkinan, semantik dunia-dunia yang mungkin (possible worlds semantics), dan hubungan aksesibilitas antar dunia. Analisis komparatif terhadap prinsip-prinsip di setiap sistem menunjukkan bahwa perbedaan relasi aksesibilitas menghasilkan kalkulus kemungkinan yang berbeda secara fundamental. Implikasi terhadap filsafat, ilmu komputer, dan linguistik turut dibahas.

Kata kunci: logika modal, kemungkinan, keharusan, dunia-dunia yang mungkin, aksesibilitas, sistem K, sistem S5, logika epistemik.

1. PENDAHULUAN

Logika modal merupakan perluasan dari logika klasik yang memasukkan operator-operator modalitas, yaitu operator yang mengekspresikan mode kebenaran suatu proposisi. Dua operator modal dasar adalah operator keharusan atau necessity (dilambangkan \Box atau K) dan operator kemungkinan atau possibility (dilambangkan \Diamond atau M). Secara intuitif, $\Box P$ berarti “P adalah benar secara niscaya”, sementara $\Diamond P$ berarti “P mungkin saja benar”.

Ide tentang kemungkinan logis telah hadir sejak filsafat Aristoteles, namun formalisasi matematisnya baru berkembang pesat pada abad ke-20 melalui karya C.I. Lewis, Clarence Irving Lewis, dan kemudian Saul Kripke. Lewis memperkenalkan berbagai sistem aksiomatik untuk logika modal, sedangkan Kripke memberikan semantik formal yang kokoh melalui konsep dunia-dunia yang mungkin (possible worlds) pada tahun 1959-1963.

Pertanyaan sentral yang diangkat makalah ini adalah: apakah prinsip-prinsip yang

mengatur kemungkinan bersifat universal, atau berbeda-beda bergantung pada sistem modal yang dipilih? Jika berbeda, mengapa perbedaan itu ada dan apa konsekuensinya?

1.1 Motivasi

Pemahaman mendalam tentang operator kemungkinan memiliki dampak luas. Dalam filsafat, ia menyentuh pertanyaan tentang fakta kontingen versus fakta niscaya, tentang identitas melintasi dunia-dunia yang mungkin. Dalam ilmu komputer, logika modal digunakan dalam verifikasi program, kecerdasan buatan, dan teori permainan. Dalam linguistik, ia memodelkan tuturan kondisional, subjungtif, dan modalitas bahasa alami.

1.2 Ruang Lingkup

Makalah ini dibatasi pada logika modal proposisional, tidak mencakup logika modal predikat orde pertama atau orde tinggi. Sistem yang dibahas meliputi K, T, D, B, S4, dan S5, serta beberapa logika modal terapan seperti logika epistemik (sistem S4/S5 dari epistemic logic) dan logika temporal linear.

2. DASAR-DASAR LOGIKA MODAL

2.1 Sintaksis Dasar

Bahasa logika modal proposisional L dibentuk dari:

- Himpunan tak hingga variabel proposisional: p, q, r, \dots
 - Konektif klasik: \neg (negasi), \wedge (konjungsi), \vee (disjungsi), \rightarrow (implikasi), \leftrightarrow (biimplikasi)
 - Operator modal: \Box (necessity/keharusan) dan \Diamond (possibility/kemungkinan)
- Konstanta logis: \top (tautologi), \perp (kontradiksi)

Secara rekursif, formula-formula dalam L didefinisikan sebagai:

$$\varphi ::= p \mid \top \mid \perp \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

Dua operator modal saling mendefinisikan satu sama lain: $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$, dan $\Box\varphi \equiv \neg\Diamond\neg\varphi$. Ini berarti kemungkinan adalah negasi dari keharusan-tidak: “P mungkin” sama dengan “tidak niscaya bahwa tidak-P”.

2.2 Semantik Dunia-Dunia yang Mungkin (Kripke Semantics)

Semantik Kripke menyediakan interpretasi formal bagi logika modal. Sebuah model

Kripke M adalah tripel:

$$M = \langle W, R, V \rangle$$

di mana:

- W adalah himpunan tak kosong dunia-dunia yang mungkin (possible worlds) •
- $R \subseteq W \times W$ adalah relasi aksesibilitas (accessibility relation) antar dunia
- $V: \text{Var} \rightarrow P(W)$ adalah fungsi valuasi yang memetakan variabel proposisional ke himpunan dunia di mana variabel itu benar

Kondisi kebenaran untuk operator modal di dunia $w \in W$:

$$M, w \models \Box\phi \text{ iff } \forall v (wRv \rightarrow M, v \models \phi)$$
$$M, w \models \Diamond\phi \text{ iff } \exists v (wRv \wedge M, v \models \phi)$$

Dengan kata lain, “ $\Box\phi$ benar di w ” berarti ϕ benar di semua dunia yang dapat diakses dari w ; dan “ $\Diamond\phi$ benar di w ” berarti ada setidaknya satu dunia aksesibel dari w di mana ϕ benar.

2.3 Validitas dan Konsekuensi Logis

Sebuah formula ϕ adalah valid dalam kelas frame F (ditulis $F \models \phi$) jika ϕ benar di semua dunia dari semua model yang dibangun di atas F . Sebuah sistem logika modal L adalah lengkap (complete) terhadap kelas frame F jika $L \vdash \phi \Leftrightarrow F \models \phi$.

3. SISTEM-SISTEM LOGIKA MODAL DAN PRINSIP KEMUNGKINAN

3.1 Sistem K: Basis Minimal

Sistem K (dinamai atas nama Kripke) adalah sistem logika modal paling lemah. Aksioma-aksiomanya adalah semua tautologi logika klasik ditambah:

$$(K) \quad \Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$$

Aturan inferensi: Modus Ponens (MP) dan Necessitation (Nec): jika $\vdash \phi$ maka \vdash

$\Box\phi$. Dalam sistem K, operator kemungkinan memiliki sifat:

- Distribusi: $\Diamond(\phi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$ (derivabel dari K)
- Jika ϕ adalah tautologi, maka $\Box\phi$ (dari Necessitation)

- Tidak ada asumsi tentang sifat relasi R

Semantiknya: frame K adalah frame arbitrary dengan relasi R tak terbatas. Ini adalah sistem yang paling inklusif. Setiap sistem modal yang kita akan bahas adalah ekstensi dari K.

3.2 Sistem T: Aksioma Refleksivitas

Sistem T menambahkan aksioma T ke sistem K:

$$(T) \quad \Box\phi \rightarrow \phi$$

Aksioma T menyatakan: jika sesuatu niscaya, maka ia aktual. Secara semantik, aksioma ini berkorespondensi dengan relasi R yang bersifat refleksif: $\forall w(wRw)$. Setiap dunia dapat mengakses dirinya sendiri.

Implikasi terhadap kemungkinan: karena $\Diamond\phi \equiv \neg\Box\neg\phi$, dan dengan T kita mendapatkan bahwa setiap dunia aktual menjangkau dirinya sendiri, maka apapun yang aktual juga mungkin:

$$(T') \quad \phi \rightarrow \Diamond\phi$$

Ini adalah prinsip penting: aktualitas mengimplikasikan kemungkinan. Sesuatu yang benar-benar terjadi pastilah mungkin terjadi. Prinsip ini tampak sangat intuitif dan hampir tidak dapat diperdebatkan dalam konteks kemungkinan logis.

3.3 Sistem D: Logika Deontik

Sistem D menambahkan aksioma D ke sistem K:

$$(D) \quad \Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$$

Aksioma D menyatakan bahwa keharusan mengimplikasikan kemungkinan: jika sesuatu niscaya maka ia mungkin. Secara semantik, ini berkorespondensi dengan relasi R yang serial: setiap dunia memiliki setidaknya satu dunia aksesibel ($\forall w \exists v(wRv)$).

Sistem D awalnya dikembangkan untuk logika deontik, di mana \Box dibaca sebagai “diwajibkan” (obligatory) dan \Diamond dibaca sebagai “diizinkan” (permissible). Aksioma D maka berbunyi: jika sesuatu diwajibkan, maka ia diizinkan, yang mencegah sistem dari menghasilkan kewajiban yang saling bertentangan.

3.4 Sistem B: Simetri dan Kemungkinan Balik

Sistem B (dari Brouwer) menambahkan aksioma B ke sistem T:

$$(B) \quad \varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$$

Aksioma B menyatakan: jika φ benar di dunia ini, maka di semua dunia yang dapat diakses, φ masih mungkin (yaitu dunia ini masih aksesibel dari sana). Semantiknya berkorespondensi dengan relasi R yang simetris: $wRv \rightarrow vRw$.

Prinsip B memiliki implikasi filosofis yang kuat: kemungkinan bersifat “simetris”. Jika saya dapat membayangkan suatu dunia alternatif v dari dunia aktual w , maka dari v , dunia w tetap dapat dibayangkan. Ini berarti tidak ada asimetri epistemik atau ontologis dalam aksesibilitas dunia-dunia.

3.5 Sistem S4: Transitivitas dan Kemungkinan Kemungkinan

Sistem S4 menambahkan aksioma 4 ke sistem T:

$$(4) \quad \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$$

Aksioma 4 menyatakan bahwa keharusan bersifat niscaya: jika sesuatu niscaya, maka niscaya ia niscaya. Semantiknya berkorespondensi dengan relasi R yang transitif: $wRv \wedge vRu \rightarrow wRu$.

Untuk operator kemungkinan, aksioma 4 menghasilkan prinsip ekuivalen:

$$(4') \quad \Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$$

Ini adalah prinsip “kemungkinan dari kemungkinan adalah kemungkinan” — jika mungkin bahwa sesuatu mungkin, maka sesuatu itu memang mungkin. Prinsip ini kontroversial: apakah “mungkin mungkin” lebih lemah dari “mungkin”? Dalam S4, keduanya ekuivalen.

3.6 Sistem S5: Aksesibilitas Universal

Sistem S5 adalah sistem modal klasik yang paling kuat di antara hierarki Lewis-Kripke, diperoleh dengan menambahkan aksioma 5 ke sistem T (atau S4):

$$(5) \quad \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$$

Aksioma 5 menyatakan bahwa kemungkinan bersifat niscaya: jika sesuatu mungkin, maka niscaya ia mungkin. Semantiknya berkorespondensi dengan relasi R yang merupakan relasi ekuivalensi (refleksif, simetris, transitif), yaitu semua dunia saling dapat mengakses satu sama lain dalam setiap kelas ekuivalensinya.

Konsekuensi penting dari S5 untuk prinsip kemungkinan:

- Kemungkinan adalah “mutlak”: tidak bergantung pada perspektif dunia. Jika p mungkin, ia mungkin di mana-mana.
- Tidak-kemungkinan juga mutlak: jika $\neg\Diamond p$, maka $\Box\neg\Diamond p$
- Fakta modal adalah fakta niscaya: semua pernyataan modal (tentang apa yang mungkin atau niscaya) adalah dirinya sendiri niscaya atau niscaya-salah.

S5 adalah sistem yang paling banyak digunakan dalam filsafat analitik kontemporer untuk membahas kemungkinan metafisika (metaphysical possibility), karena kemungkinan metafisika dianggap bersifat absolut dan tidak relatif terhadap perspektif.

4. TABEL PERBANDINGAN PRINSIP-PRINSIP KEMUNGKINAN

K	(K) saja	Tidak ada	$\Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$	Modal minimal
D	(D): $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Serial	Kewajiban \Rightarrow Izin	Deontik
T	(T): $\Box\varphi \rightarrow \varphi$	Refleksif	$\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Aktual \Rightarrow Mungkin
B	(B): $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	Simetris	$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	Akses bolak-balik
S4	(4): $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	Transitif	$\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Kemungkinan tetap
S5	(5): $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	Ekuivalensi	$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	Modal absolut

5. LOGIKA MODAL JAMAK: BANYAK OPERATOR KEMUNGKINAN

5.1 Motivasi untuk Modal Jamak

Logika modal dengan banyak operator (polymodal logic atau multi-modal logic) memperkenalkan lebih dari satu operator kemungkinan dan keharusan, masing-masing dengan interpretasi dan aturan berbeda. Ini mencerminkan kenyataan bahwa dalam bahasa alami dan praktik filosofis, ada banyak jenis kemungkinan yang berbeda secara konseptual.

Beberapa jenis kemungkinan yang dibedakan dalam literatur:

- Kemungkinan logis (logical possibility): konsisten secara logis, tidak mengandung kontradiksi
- Kemungkinan metafisika (metaphysical possibility): mungkin dalam struktur realitas yang lebih dalam
- Kemungkinan fisika (physical/nomic possibility): konsisten dengan hukum alam

- Kemungkinan epistemik (epistemic possibility): konsisten dengan apa yang diketahui agen
- Kemungkinan deontik (deontic possibility): diizinkan secara normatif
- Kemungkinan temporal (temporal possibility): akan atau pernah terjadi

5.2 Logika Multi-Modal: Sintaksis dan Semantik

Dalam logika multi-modal, kita memiliki indeks operator. Untuk n agen atau n jenis modalitas, kita memiliki operator \Box_1, \dots, \Box_n dan $\Diamond_1, \dots, \Diamond_n$. Bahasa diperluas menjadi:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \Box_i\varphi \mid \Diamond_i\varphi$$

Model Kripke multi-modal adalah:

$$M = \langle W, R_1, \dots, R_n, V \rangle$$

di mana setiap R_i adalah relasi aksesibilitas untuk operator ke- i . Kondisi

$$\text{kebenaran: } M, w \models \Diamond_i\varphi \text{ iff } \exists v (wR_iv \wedge M, v \models \varphi)$$

5.3 Logika Epistemik Multi-Agen

Logika epistemik memodelkan pengetahuan (knowledge) dan kepercayaan (belief) agen. Untuk agen i , operator $K_i\varphi$ dibaca “agen i mengetahui φ ” dan $M_i\varphi$ dibaca “agen i menganggap φ mungkin (epistemik)”.

Prinsip-prinsip utama untuk kemungkinan epistemik M_i :

- (Konsistensi): $\neg M_i \perp$, agen tidak menganggap mungkin kontradiksi
- (T-epistemic): $K_i\varphi \rightarrow \varphi$, jika agen mengetahui φ , maka φ benar
- (4-epistemic): $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$, introspeksi positif: jika tahu, tahu bahwa tahu
- (5-epistemic): $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$, introspeksi negatif: jika tidak tahu, tahu bahwa tidak tahu

Interaksi antara agen menghasilkan prinsip kemungkinan epistemik yang kompleks, seperti pengetahuan bersama (common knowledge) $CK\varphi$ yang membutuhkan semua agen mengetahui φ , semua tahu bahwa semua tahu, dan seterusnya hingga tak hingga tingkat.

5.4 Logika Temporal

Logika temporal memodelkan kemungkinan temporal menggunakan operator F (di masa depan/future) dan P (di masa lalu/past):

- $F\phi$: di suatu saat di masa depan, ϕ benar
- $G\phi$: di semua saat di masa depan, ϕ benar (keharusan temporal)
- $P\phi$: di suatu saat di masa lalu, ϕ pernah benar
- $H\phi$: di semua saat di masa lalu, ϕ selalu benar

Prinsip kemungkinan temporal bersifat asimetris karena waktu tidak simetris. Misalnya:

$$(Lin) \quad G(F\phi \vee \phi \vee P\phi)$$

Prinsip ini (linearitas waktu) menyatakan bahwa untuk setiap fakta, salah satu dari tiga kondisi benar: ia akan terjadi, sedang terjadi, atau pernah terjadi.

5.5 Hierarki Kemungkinan: Hubungan antar Modalitas

Salah satu pertanyaan menarik dalam logika modal jamak adalah hubungan hierarkis antar jenis kemungkinan. Secara umum, diterima bahwa:

$$\text{Kemungkinan logis} \supset \text{Kemungkinan metafisika} \supset \text{Kemungkinan fisika} \supset \text{Kemungkinan epistemik (tertentu)}$$

Artinya, setiap kemungkinan metafisika adalah kemungkinan logis, setiap kemungkinan fisika adalah kemungkinan metafisika, dan seterusnya. Dalam logika multi-modal, hubungan ini dapat diekspresikan sebagai:

$$(Hier) \quad \diamond_{meta}\phi \rightarrow \diamond_{log}\phi$$

Formula ini menyatakan bahwa jika sesuatu mungkin secara metafisika, maka ia juga mungkin secara logis. Prinsip-prinsip seperti ini menstrukturkan ruang modal jamak secara sistematis.

6. PRINSIP-PRINSIP UTAMA UNTUK KEMUNGKINAN

6.1 Inventarisasi Prinsip

Berikut adalah rangkuman prinsip-prinsip utama yang mengatur operator kemungkinan di berbagai sistem:

P1	$\phi \rightarrow \diamond\phi$	Aktualitas mengimplikasikan kemungkinan	T, B, S4, S5
P2	$\diamond\phi \rightarrow \square\diamond\phi$	Kemungkinan niscaya (S5)	S5

P3	$\diamond\diamond\phi \rightarrow \diamond\phi$	Kemungkinan idempoten (S4)	S4, S5
P4	$\square\phi \rightarrow \diamond\phi$	Keharusan mengimplikasikan kemungkinan	D, T, S4, S5
P5	$\phi \rightarrow \square\diamond\phi$	Aksioma Brouwer	B, S5
P6	$\diamond(\phi \wedge \psi) \rightarrow \diamond\phi \wedge \diamond\psi$	Kemungkinan mendistribusikan konjungsi	K dan semua
P7	$\diamond\top$ (jika R serial)	Dunia aktual mungkin	D, T, S4, S5

6.2 Analisis Prinsip P1 dan P2

Prinsip P1 ($\phi \rightarrow \diamond\phi$) adalah salah satu yang paling fundamental dan paling diterima. Ia menyatakan bahwa dunia aktual adalah dunia yang mungkin. Ini setara dengan reflektivitas relasi aksesibilitas dan hadir dalam semua sistem dari T ke atas.

Prinsip P2 ($\diamond\phi \rightarrow \square\diamond\phi$) jauh lebih kontroversial. Ia menyatakan bahwa kemungkinan adalah sifat yang mutlak: jika p mungkin, maka di semua dunia yang mungkin, p tetap mungkin. Prinsip ini berlaku di S5 dan sering dikaitkan dengan pandangan Kripke tentang kemungkinan metafisika: fakta-fakta modal adalah fakta-fakta niscaya tentang struktur modal itu sendiri.

6.3 Prinsip-Prinsip untuk Modal Jamak

Dalam logika multi-modal, prinsip tambahan mengatur hubungan antar operator kemungkinan:

- (Komposisi): $\diamond_i \diamond_j \phi \rightarrow \diamond_k \phi$, kemungkinan berurutan dapat 'digabungkan'
- (Inklusivitas): $\diamond_i \phi \rightarrow \diamond_j \phi$, jika mungkin menurut i, maka mungkin menurut j (jika j lebih lemah dari i)
- (Independensi): Kemungkinan epistemik tidak mengimplikasikan kemungkinan metafisika secara langsung

Prinsip-prinsip ini membentuk struktur aljabar (lattice) dari sistem-sistem modal, di mana

sistem yang lebih kuat berada di atas sistem yang lebih lemah dalam hierarki kemungkinan.

7. IMPLIKASI FILOSOFIS DAN TEORETIS

7.1 Kemungkinan vs. Konsepsi

Perbedaan antara prinsip kemungkinan di berbagai sistem mencerminkan perbedaan konsepsi filosofis tentang apa yang dimaksud dengan “mungkin”. Sistem K mewakili pandangan minimalis: hanya deduksi logis yang terjamin. Sistem S5 mewakili pandangan Leibnizian-Kripkean: kemungkinan adalah sifat absolut dari proposisi, tidak bergantung pada perspektif.

7.2 Identitas Melintasi Dunia

Prinsip P2 dari S5 memiliki implikasi terhadap masalah identitas trans-world (transworld identity). Jika kemungkinan adalah mutlak, maka pertanyaan tentang apakah individu tertentu bisa saja tidak ada, atau bisa memiliki sifat yang berbeda, memiliki jawaban yang pasti. Kripke berargumen bahwa nama-nama seperti “Aristotle” adalah designator kaku (rigid designator) yang merujuk ke individu yang sama di semua dunia yang mungkin di mana individu itu ada.

7.3 Kemungkinan dalam Ilmu Komputer

Dalam verifikasi formal program, logika temporal CTL (Computation Tree Logic) dan LTL (Linear Temporal Logic) menggunakan prinsip-prinsip kemungkinan temporal untuk memverifikasi properti perangkat lunak. Misalnya, prinsip liveness menyatakan bahwa sesuatu yang baik akan terjadi di masa depan ($EF\phi$), sementara prinsip safety menyatakan bahwa sesuatu yang buruk tidak akan pernah terjadi ($AG\neg\psi$).

8. KESIMPULAN

Makalah ini telah menunjukkan bahwa prinsip-prinsip untuk kemungkinan tidak bersifat universal, melainkan bergantung pada sistem logika modal yang dipilih. Dari sistem K yang minimal hingga S5 yang paling kuat, setiap tambahan aksioma memperkuat prinsip-prinsip kemungkinan yang tersedia.

Temuan utama dapat dirangkum sebagai berikut:

1. Sistem K memberikan kerangka minimal tanpa asumsi apapun tentang sifat relasi aksesibilitas.

2. Sistem T menambahkan prinsip fundamental bahwa aktualitas mengimplikasikan kemungkinan, berkorespondensi dengan reflektivitas.
3. Sistem S4 dan S5 memberikan prinsip-prinsip yang semakin kuat: kemungkinan idempoten di S4, dan kemungkinan mutlak-niscaya di S5.
4. Logika multi-modal memperkaya lanskap ini dengan memungkinkan banyak jenis kemungkinan yang saling berinteraksi.

Ke depan, penelitian yang menarik mencakup pengembangan logika modal gabungan (combined modal logics), yang mengintegrasikan modalitas epistemi, deontik, dan temporal dalam satu sistem terpadu, serta eksplorasi semantik non-Kripkean seperti semantik topologis dan semantik aljabrais yang menawarkan perspektif alternatif.

DAFTAR PUSTAKA

- Blackburn, P., de Rijke, M., & Venema, Y. (2001). *Modal Logic*. Cambridge University Press. Chellas, B. F. (1980). *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press. Fagin, R., Halpern, J. Y., Moses, Y., & Vardi, M. Y. (1995). *Reasoning About Knowledge*. MIT Press. Kripke, S. A. (1963). Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica*, 16, 83–94. Kripke, S. A. (1980). *Naming and Necessity*. Harvard University Press.
- Lewis, C. I., & Langford, C. H. (1932). *Symbolic Logic*. Dover Publications.
- Lewis, D. (1986). *On the Plurality of Worlds*. Blackwell.
- Seegerberg, K. (1971). *An Essay in Classical Modal Logic*. Uppsala University.
- Zeman, J. J. (1973). *Modal Logic: The Lewis-Modal Systems*. Clarendon Press.