EPISTEMEUS
ESSAYS

Volume 1 ; Issue 2 29.05.2026

Tentang Frege. II

M.Zahid.Z

Begriffsschrift adalah transisi Frege dari Matematikawan Murni, kearah Filsuf-Logikawan. Dengan jelas hal ini, ditunjukkan oleh fakta, Disertasi Habilitasi Frege(*Methods of Calculation based on an Extension of the Concept of Quantity*) mulai menyentuh pertanyaan-pertanyaan yang bukan lagi murni teknis. Frege menolak pendapat Immanuel Kant bahwa Aritmatika dan Geometri, asalnya adalah intusi Spasial-Temporal. Tentu bahwa sesuatu yang begitu abstrak, dan komprehensif, takmungkin berasal dari Intuisi tentag Ruang dan Waktu semata, seperti yang dikatakan Frege dalam Habilitasi:

> *And it is clear that a concept as comprehensive and abstract as the concept of quantity cannot be an intuition. There is accordingly a noteworthy difference between geometry and arithmetic in the way in which their fundamental principles are grounded*
>
> *Lihat Gottlob Frege Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy,hal 56*

Frege dengan eksplisit menunjukkan cikal-bakal logisisme nya disini, yang 5 tahun kemudian terwujud sebagai cetak biru dasar untuk Logisisme, *Begriffsschrift*(yang selanjutnya kita sebut sebagai Begriff demi penyingkatan)

Cikal bakal logisisme nampak dari, ketika Frege menganggap bahwa pendasaran bercorak intuisi ala Kant nampaknya tak akomodatif untuk menjelaskan daya-aritmatika, yang menurutnya **"konsep kuantitas/magnitudo terlalu abstrak untuk disandarkan pada intuisi murni"** – parafrase saya.

Jadi, jelas bahwa logisisme adalah hasil transformasi bertahap. Disertasi kedua pada dasarnya adalah batu lompatan Frege untuk menuju pada persoalan filosofis-matematika nantinya. Sehingga Disertasi itu dapat dianggap menandai Palingan Logika, kendati itu baru eksplisit pada 1879.

Cukup menarik apabila dipikir kembali, bahwa lanskap intelektual zamannya tak memengaruhinya, bahwa ia secara orisinal mengembangkan jalannya sendiri, dan bahwa orisinalitas Frege membawanya pada jalan yang begitu jauh apabila kita lihat dari perspektif zaman itu, namun terasa dekat dalam perspektif Filsafat-Logika Modern – saya pikir ini adalah ironi tentang keterlambatan, ketika kesadaran akan seberapa penting suatu yang digagasnya, justru disadari beberapa dekada kemudian(Russel-Whitehead dan Hilbert-Ackermann secara sadar mengakui dalam buku terpenting mereka tentang Logika-Matematika, bahwa Frege memberi pendasaran signifikan pada Analisis-Logis)

> *In all questions of logical analysis, our chief debt is to Frege.*
>
> *Principia Mathematica I, Preface*

> *die logische Symbolik neue Anregung durch die Bedürfnisse der Mathematik nach exakter Grundlegung und strenger axiomatischer Behandlung. G. FREGE veröffentlichte seine "Begriffsschrift" (1879) und seine "Grundgesetze der Arithmetik" (1893-1903). G. PEANO und seine Mitarbeiter begannen 1894 mit der Herausgabe des "Formulaire de Mathematiques", in dem alle mathematischen Disziplinen im Logikkalkül dargestellt werden sollten. Das Erscheinen der "Prinzipia mathematica" (1910-1913) von A. N. WHITEHEAD und B. RUSSEL bildet einen Höhepunkt dieser Entwicklung*
>
> *Grundzüge der Theoretischen Logik 1938*

Dua kutipan tadi adalah pengakuan eksplisit Russel-Whitehead dalam Principia, Hilbert-Ackermann dalam Grundzüge, tentang peran Frege, yang sayangnya, pengakuan tersebut baru sampai pasca-logisisme Frege menemui jalan buntu untuk melarikan diri dari Paradoks yang menimpa Hukum Dasar Kelima, Aritmatika Frege.

Sebuah keterlambatan pengakuan yang mungkin dapat ditarik alasan wajar dan tidak wajarnya – bahwa Frege, hampir seluruh karir akademiknya dihabiskan di Jena. Dan bahwa perlakuan Matematikawan seperti Schröder juga memengaruhi popularitasnya untuk dilirik.

Yang jelas, bahwa dia hidup dimasa krisis, sehingga kemungkinan besar Palingan Filsafat (*Philosophical Turn*) dan Palingan Logika Frege juga dipicu oleh nuansa krisis.

Krisis abad 19 yang melanda Matematika pada dasarnya dapat ditelisik dari berbagai hal yang menjadi faktor, namun saya pikir, pembacaan psikologistik atas Kant dan munculnya banyak cabang baru dalam Matematika, yang membuat Matematika baik dalam aspek teknisnya, hingga filosofisnya, mengalami krisis.

Kant pada pada dasarnya dapat dikatakan Anti-Psikologis dalam memandang Nalar dan Logika, namun dalam pembacaan Frege, terma-terma yang Kant gunakan banyak yang bernuansa Psikologistik — tidak mengherankan bahwa pembacaan psikologistik dapat muncul bahkan ketika Kant sendiri baik secara implisit maupun eksplisit menolaknya.

Lalu tentang Krisis Matematika abad 19, ini berkaitan dengan Geometri Euklid & Non-Euklid — yang nantinya diatasi oleh Program Erlangen Felix Klein. Yang jelas bahwa krisis Geometri ini, takdapat dipungkiri menjadi faktor kuat, sejajar dengan faktor-faktor seperti munculnya Paradoks dalam Ordinal-Berjenjang(Burali-Forti) dan hasil-hasil teknis Cantor yang kontraintuitif tentang Himpunan Takhingga.

Saya pikir psikologisme berperan dalam aspek filosofis, dan Geometri Non-Euklid berperan pada aspek teknis

Terlepas dari ini, saya ingin membahas **apa itu logika menurut Frege?**, kendati saya membahasnya sangat ringkas dibagian awal Esai ini, namun saya kira itu penting untuk memberi gambaran "status logika menurut Frege" — misalnya anti-psikologisme Frege, dia mengambil ini dari Kant, dan argumennya bukan bahwa "psikologi itu *nonsense*", bahkan mungkin juga, pembacaan Platonis dan Kuasi-Platonis pada Frege, itu juga terlalu kasar – atau setidaknya, itu bukan satu-satunya jalan interpretasi.

Saya lebih cenderung mengafirmasi corak interpretasi, yang memandang Frege sebagai seseorang yang menganggap Logika sebagai Epistemik-Normatif, dan pembacaan Anssi Korhonen adalah salah satu kandidat kuat untuk model interpretasi jenis Epistemik-Normatif.

Tentang status Logika menurut Frege

Status Logika adalah, bukan tentang **Bagaimana Logika**, tetapi **Apa Logika**. Distingsi ini penting sebab Mekanisme berbeda dengan identitas – kita dapat mengoparsikan Kalkulus Formal, sebuah Logika mekanis yang berbicara tentang jika terdapat suatu aturan maka terdapat konsekuensi dari aturan itu. Disisi lain, Identitas bertanya Logika itu apa? Hukum pemikiran? Lalu Hukum pemikiran itu apa?

Misalnya kita menjawab, "Hukum Pemikiran suatu aturan yang bersifat harus dalam Pemikiran", **harus**, itu apa? Apakah "Logika adalah tentang demikianlah kita berpikir" dan "Logika adalah tentang kita yang harus berpikir demikian", keduanya sama?

Saya pikir keduanya berbeda; "Harus berpikir demikian" dengan "demikianlah berpikir" keduanya berbicara hal berbeda, "demikianlah pikiran itu" berbicara tentang Konstitutifitas, sementara "haruslah begini pikiran itu" berbicara tentang acuan bersama – normatifitas.

Konstitutif adalah pra-syarat. Sehingga ketika logika didefinisikan sebagai konstitusi pikiran, maka pra-syarat pikiran adalah logika, logika adalah kondisi yang memungkinkan pikiran.

normatifitas adalah tentang acuan, sehingga ketika logika didefinisikan sebagai normatif, status logika menjadi sebuah patokan tentang ”beginilah cara yang benar”.

Keduanya berbeda. Logika-sebagai-Konstitusi mengimplikasikan bahwa, tidak akan ada pemikiran tanpa logika, sebab ia adalah syarat pikiran – kondisi kemungkinan pikiran, maka pelanggaran hukum logika adalah mustahil. Ini nampaknya kontrafaktual berat dengan realitas empiris.

Lalu, Logika-sebagai-normatif, mengimplikasikan, bahwa, mungkin saja untuk seseorang berpikir tanpa logika, maka haruslah dibuat acuan tetap yang menjadi standar bersama, yang menjadi pemberi ciri, kapan seseorang disebut berlogika, dan kapan tidak.

Masalah Konstitutifitas-Logika vs Normatifitas-Logika yang saya jelaskan tadi, sebetulnya merupakan perdebatan interpretasi terhadap Frege, apa itu logika menurut Frege?

Kita dapat menjumpai pada pembukaan buku *Grundgesetze* bahwa Frege menyebut Logika sebagai ”Hukum Pemikiran” dalam artian normatif. Logika adalah *festsetzen* – bersifat menetapkan seharusnya seseorang berpikir (*wie man denken soll*). Sehingga Hukum Logika adalah hukum yang paling umum tentang pemikiran yang benar (*die allgemeinsten Gesetze des Wahrseins*) — logika sebagai norma.

Namun dapat dijumpai pula dalam (*Grundlagen §§14, 26*), dimana Frege berargumen, bilamana seseorang melanggar hukum logika, kekacauan terjadi, sehingga pemikiran **tidak lagi mungkin**. Ini adalah teks pendukung interpetasi Logika-sebagai-konstitusi dalam menafsirkan posisi Frege.

Apakah keduanya dikotomis? Dan apakah Frege berposisi pada salahsatunya? Atau justru, keduanya? Bila memang Ya, apakah normatifitas dapat koheren dengan konstitutifitas?

Dalam pembacaan Anssi Korhonen terhadap Frege, normatifitas dan Konstitutifitas pada dasarnya tidak dikotomis, karena keduanya menyatu dalam peran logika sebagai *artikulasi nalar saintifik*, sehingga status konstitutif logika timbul karena kita tidak dapat tidak untuk mengakui peran logika sebagai asersi-sebagai-pengetahuan dan logika sebagai normatif adalah sebuah konsekuensi ketika seseorang berkomitmen pada kebenaran.

Sehingga kedua predikat itu pada dasarnya kohesif. Apabila kita padatkan dalam satu ungkapan:

Bagi Frege, nalar, beserta asersi objektif dan normatifitas — paling baik ditangkap melalui artikulasi tentang apa yang terlibat dalam penalaran ilmiah.

Pembahasan mengenai ini akan saya dalami lebih detail pada esai-esai berikutnya — sebab bahasan ini memiliki kompleksitasnya tersendiri. Saya akan lebih berfokus pada Begriff(1879).

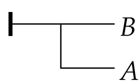
Anatomi Sistem Logika Frege dalam Begriffsschrift

Terdapat suatu hal yang perlu ditegaskan bahwa Frege memandang logika sebagai sesuatu yang dikerjakan seperti matematika(yang saat ini kita sebut sebagai Teori-Bukti) – Frege menganggap dan membuat Logika menjadi objek kajian yang secara praktik dan pembelajarannya dapat diperlakukan seperti matematika.

Sehingga ia memandang Logika lebih bersifat matematis alih-alih Linguistis. Inilah yang membuatnya berbeda dari Logika Aristotelian.

Dalam Habilitasi ia menyadari bahwa skema analisis Fungsi-Argumen dalam matematika pada dasarnya dapat digunakan untuk menganalisis pernyataan yang sebelumnya dianggap sebagai ranah Logika-Bahasa; pertimbangkan sebuah "atom (x)" sebagai argumen dengan "penyusun molekul (F)" sebagai fungsi, dengan ini, pernyataan tidak lagi dibedah dengan skema subjek-predikat Aristotelian melainkan Peubah-Manasuka(*Arbitrary Variable*) yang mewakili sembarang kondisi pernyataan yang memenuhi kondisi argumen dan fungsi.

Untuk penggunaan Peubah-Manasuka hal ini lansung ditegaskan dalam (§1 Begriffsschrift 1879) bahwa Frege menggunakan salah satu cara khas matematika untuk menyatakan struktur umum tanpa merujuk pada satu intansiasi khusus; pertimbangkan sebuah peubah yang mewakili anteseden (A) dan peubah yang mewakili konsekuen (B), lalu terdapat sebuah struktur inferensial umum misalnya modus ponens yang ingin kita ekspresikan, maka alih alih merujuk pada satu intansiasi khusus kita dapat menyatakan $A \rightarrow B$ untuk sembarang intansiasi yang memenuhi Jika A maka B. Dalam Notasi Begriff dapat dibaca dari bawah(anteseden) dan atas(konsekuen):



Namun apabila kita bertanya tentang mengapa Notasi Begriff harus Dua-Dimensi?

Frege memang menyadari hal ini merepotkan bagi mesin cetak pada masa nya. Kendati demikian terdapat hal yang membuatnya mempertahankan kerepotan ini, sebuah *Lingua Characteristica* dalam pengertian Leibniz(Frege, 1882).

Frege pada dasarnya membedakan antara Logika sebagai Bahasa-Pemikiran dengan Logika sebagai Kalkulus Formal.

Logika Bahasa-Pemikiran adalah suatu Logika yang mampu mengekspresikan proses asersi dengan jujur dan eksplisit, hal ini ditampakkan dari notasi Dua-Dimensi yang menggambarkan penalaran manusia yang dari pernyataan atomik lalu menyusunnya menjadi sebuah pernyataan kompleks, ketika pernyataan kompleks itu membwntuk suatu struktur, garis-asersi di-atas menyatakan ”Saya mengasersi bahwa struktur disamping ini adalah Fakta”.

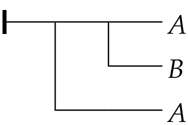
Sementara Logika-Kalkulus-Formal pada dasarnya adalah Aljabarisasi Logika yang telah dilakukan oleh George Boole dan para penerusnya.

Jelas telah tampak bahwa perbedaannya adalah ”mengkarakterkan bagaimana penalaran yang sesungguhnya” dengan ”meng-aljabarkan Logika”.

Namun dengan fakta ini tidak pula Frege menafikan pentingnya kalkulus formal. Sebab yang ia bangun di Begriff pada dasarny adalah hal tersebut. Hanya saja Frege memandang kalkulus formal harus lebih jauh dari pada Boole – sebuah Bahasa-Pemikiran yang mengekspresikan konten pembicaraan dengan perancah Logika yang membungkusnya.

Namun demikian ada sebuah ironi ketika Frege berambisi untuk Mengkarakterkan Pemikiran, tetapi disisi lain ia hanya mengizinkan $\rightarrow$ dan $\neg$ sebagai Peubah-Logis(Konstanta Logika) primitif. Sehingga sebuah penalaran sederhana harus diekspresikan dengan langkah deduksi yang begitu panjang, yang telah saya tunjukkan dengan gamblang pada halaman-halaman yang memuat pembuktian.

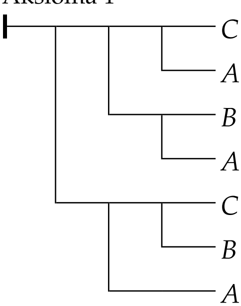
Dengan demikian Aturan Inferensi dasar pada Sistem Logika ini adalah Modus Ponens dengan beberapa aksioma sebagai berikut:



(1)

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

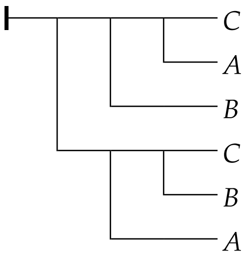
Aksioma 1



(2)

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

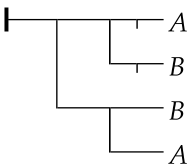
Aksioma 2



(3)

$(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

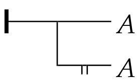
Aksioma 3



(4)

$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

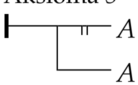
Aksioma 4



(5)

$\neg\neg A \to A$

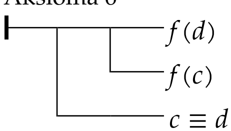
Aksioma 5



(6)

$A \to \neg\neg A$

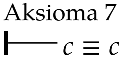
Aksioma 6



(7)

$(c \equiv d) \to (f(c) \to f(d))$

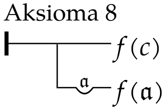
Aksioma 7



(8)

$c \equiv c$

Aksioma 8



(9)

$(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})) \to f(c)$

Aksioma 9

Kesembilan Aksioma dasar Frege tersebut, enam Aksioma adalah Logika-Proposisional dan tiga Aksioma adalah Logika-Kuantor.

Sebuah Eksperimen

Dua Minggu Esai ini ditulis pada dasarnya hanya untuk mendeduksi 19 Teorema Logika Proposisional yang diturunkan murni dari sistem Frege 1879, dengan enam aksioma proposisional primitif dan modus ponens sebagai aturan inferensi utama.

Pilihan 19 Teorema ini tidak saya pilih secara arbiter – setidaknya yang saya pikir memang demikian, sebab saya merasa bahwa 19 teorema inilah yang mengkarakterkan logika klasik sebagai logika klasik, khususnya pada ranah Logika Proposisional.

Kesembilan-belas Teorema itu juga dideduksi dengan urutan yang koheren. Saya telah bereksperimen selama dua minggu untuk mencari urutan yang tepat. Karena saya berkali kali mendapati sirkularitas ketika ingin mengekspresikan Teorema tertentu.

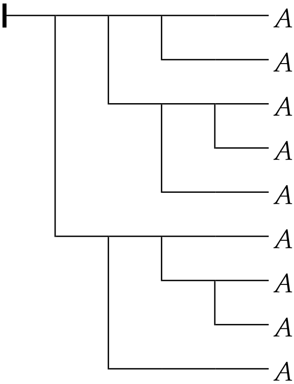
Lalu saya menemukan urutan dimana Teorema sebelumnya menjadi Lema dari Teorema selanjutnya, dan terbentuklah urutan ini:

- **Teorema 1: Identitas**
- **Teorema 2: Silogisme Hipotetis**
- **Teorema 3: Permutasi Anteseden**
- **Teorema 4: Modus Ponens sebagai Teorema**
- **Teorema 5: Kontraksi**
- **Teorema 6: Eliminasi Negasi Ganda**
- **Teorema 7: Introduksi Negasi Ganda**
- **Teorema 8: Kontrapositif / Modus Tollens**
- **Teorema 9: Transposisi**
- **Teorema 10: Ex Falso Quodlibet**
- **Teorema 11: Reductio ad Absurdum**
- **Teorema 12: Consequentia Mirabilis**
- **Teorema 13: Teorema Peirce**
- **Teorema 14: Transposisi Varian**
- **Teorema 15: De Morgan, Eliminasi Anteseden**
- **Teorema 16: De Morgan, Eliminasi Konsekuen**

- **Teorema 17: De Morgan, Introduksi**
- **Teorema 18: Eksportasi**
- **Teorema 19: Importasi**

Catatan: Saya tidak sempat merapihkan tata letak barisan-bukti, namun untuk keterbacaan-bukti itu tetap dijaga

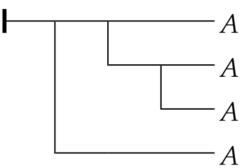
Teorema 1: Identitas $(A \to A)$



(1)

$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$

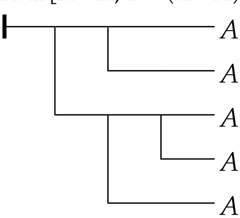
Ax2 $[A \mapsto A,\ B \mapsto (A \to A),\ C \mapsto A]$



(2)

$A \to ((A \to A) \to A)$

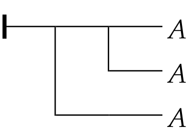
Ax1 $[A \mapsto A,\ B \mapsto (A \to A)]$



(3)

$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$

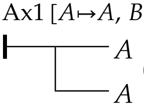
MP 1, 2



(4)

$A \to (A \to A)$

Ax1 $[A \mapsto A,\ B \mapsto A]$

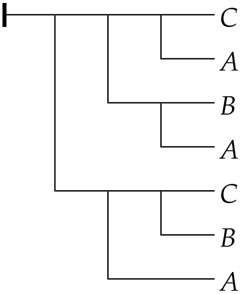


(5)

$A \to A$

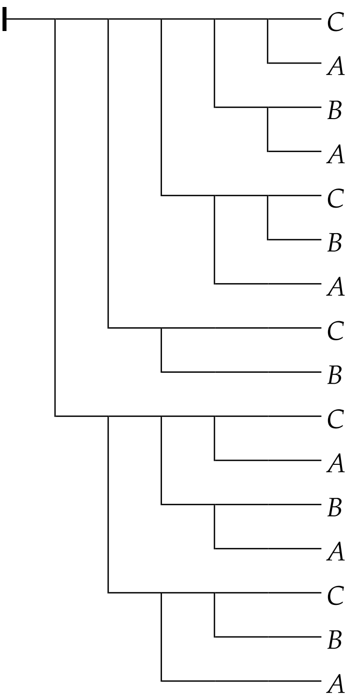
MP 3, 4 **Q.E.D.**

Teorema 2: Silogisme Hipotetis $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
dengan $F \equiv (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.



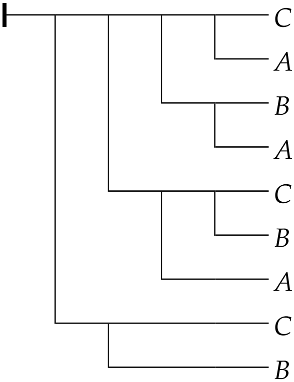
(1)

$F \equiv (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
Ax2 $[A \mapsto A,\ B \mapsto B,\ C \mapsto C]$



(2)

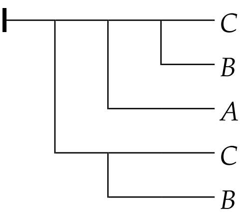
$F \to ((B \to C) \to F)$
Ax1 $[A \mapsto F,\ B \mapsto (B \to C)]$



(3)

$(B \to C) \to F$

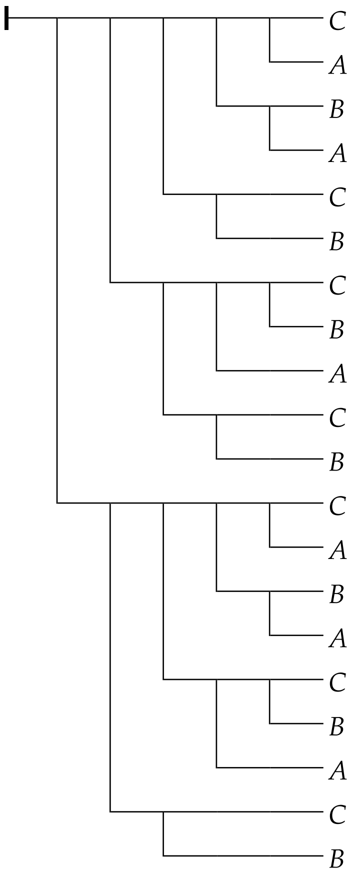
MP 1, 2



(4)

$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$

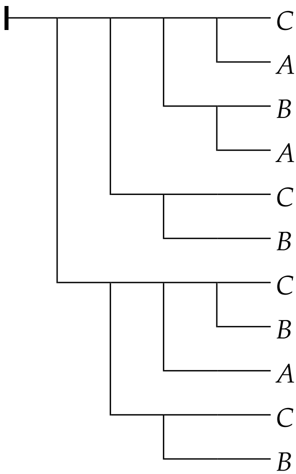
Ax1 $[A \mapsto (B \to C),\ B \mapsto A]$



(5)

$[(B \to C) \to F] \to [((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)))]$

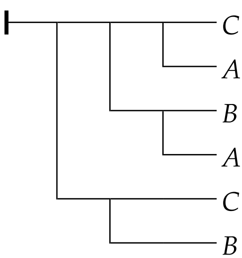
Ax2 $[A \mapsto (B \to C),\ B \mapsto (A \to (B \to C)),\ C \mapsto ((A \to B) \to (A \to C))]$



(6)

$((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

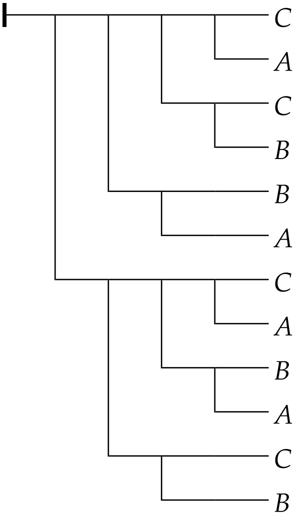
MP 3, 5



(7)

$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

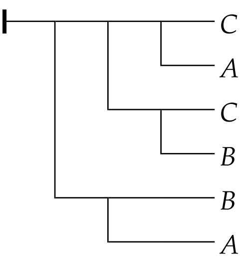
MP 4, 6



(8)

$[(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))] \to [(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))]$

Ax3 $[A \mapsto (B \to C),\ B \mapsto (A \to B),\ C \mapsto (A \to C)]$



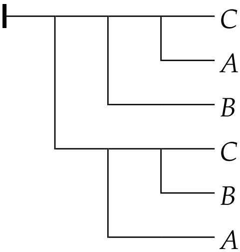
(9)

$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ **Q.E.D.**

MP 7, 8

Teorema 3: Permutasi Anteseden $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

Status: aksioma (= Ax3); dinyatakan langsung.

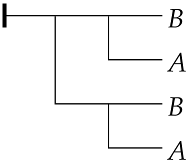


(1)

$(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ **Q.E.D.**

Ax3 $[A{\mapsto}A,\ B{\mapsto}B,\ C{\mapsto}C]$

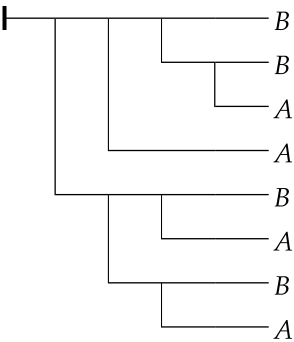
Teorema 4: Modus Ponens sebagai Teorema $A \to ((A \to B) \to B)$



(1)

$(A \to B) \to (A \to B)$

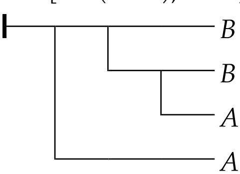
T1 $[A \mapsto (A \to B)]$



(2)

$[(A \to B) \to (A \to B)] \to [A \to ((A \to B) \to B)]$

Ax3 $[A \mapsto (A \to B),\ B \mapsto A,\ C \mapsto B]$

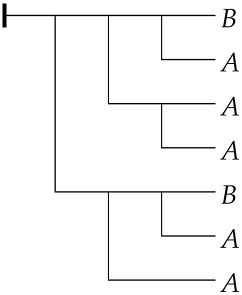


(3)

$A \to ((A \to B) \to B)$ **Q.E.D.**

MP 1, 2

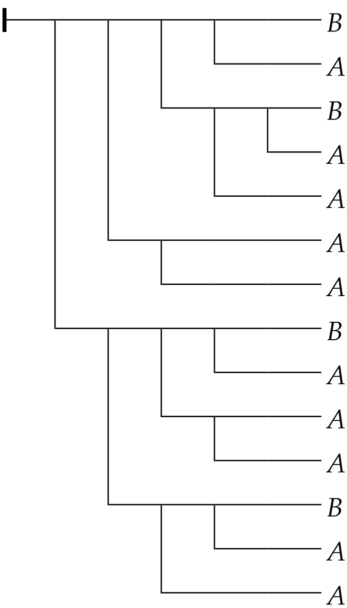
Teorema 5: Kontraksi $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$



(1)

$(A \to (A \to B)) \to ((A \to A) \to (A \to B))$

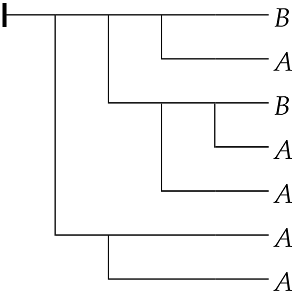
Ax2 $[A{\mapsto}A,\ B{\mapsto}A,\ C{\mapsto}B]$



(2)

$[(A \to (A \to B)) \to ((A \to A) \to (A \to B))] \to [(A \to A) \to ((A \to (A \to B)) \to (A \to B))]$

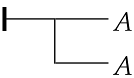
Ax3 $[A{\mapsto}(A{\to}(A{\to}B)),\ B{\mapsto}(A{\to}A),\ C{\mapsto}(A{\to}B)]$



(3)

$(A \to A) \to ((A \to (A \to B)) \to (A \to B))$

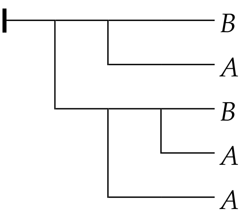
MP 1, 2



(4)

$A \to A$

T1 $[A \mapsto A]$



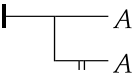
(5)

$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$ **Q.E.D.**

MP 4, 3

Teorema 6: Eliminasi Negasi Ganda $\neg\neg A \to A$

Status: aksioma (= Ax5); dinyatakan langsung.



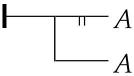
(1)

$\neg\neg A \to A$ **Q.E.D.**

Ax5 $[A \mapsto A]$

Teorema 7: Introduksi Negasi Ganda $A \to \neg\neg A$

Status: aksioma (= Ax6); dinyatakan langsung.



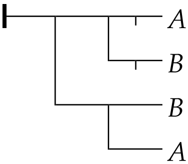
(1)

$A \to \neg\neg A$ **Q.E.D.**

Ax6 $[A \mapsto A]$

Teorema 8: Kontrapositif / Modus Tollens $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Status: aksioma (= Ax4); dinyatakan langsung.

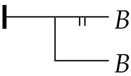


(1)

$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ **Q.E.D.**

Ax4 [$A \mapsto A$, $B \mapsto B$]

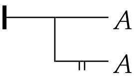
Teorema 9: Transposisi $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$



(1)

$B \to \neg\neg B$

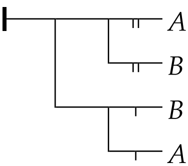
T7 $[A {\mapsto} B]$



(2)

$\neg\neg A \to A$

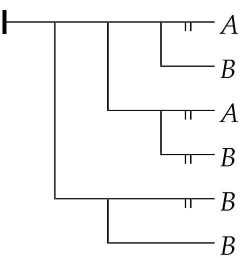
T6 $[A {\mapsto} A]$



(3)

$(\neg A \to \neg B) \to (\neg\neg B \to \neg\neg A)$

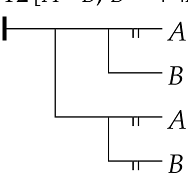
Ax4 $[A {\mapsto} \neg A,\ B {\mapsto} \neg B]$



(4)

$(B \to \neg\neg B) \to ((\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (B \to \neg\neg A))$

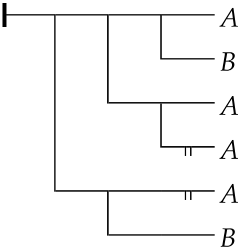
T2 $[A {\mapsto} B,\ B {\mapsto} \neg\neg B,\ C {\mapsto} \neg\neg A]$



(5)

$(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (B \to \neg\neg A)$

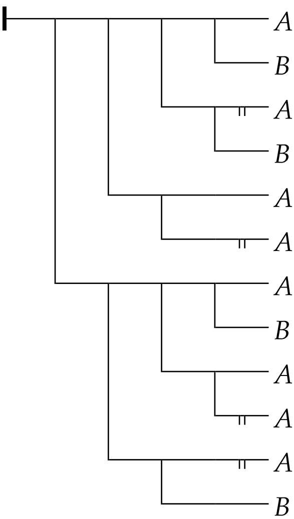
MP 1, 4



(6)

$(B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A))$

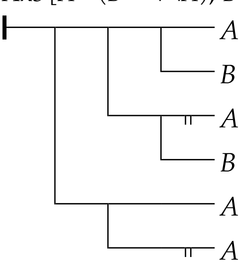
T2 $[A{\mapsto}B,\ B{\mapsto}\neg\neg A,\ C{\mapsto}A]$



(7)

$[(B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A))] \rightarrow [(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (B \rightarrow A))]$

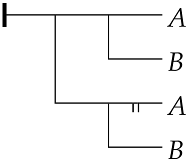
Ax3 $[A{\mapsto}(B{\rightarrow}\neg\neg A),\ B{\mapsto}(\neg\neg A{\rightarrow}A),\ C{\mapsto}(B{\rightarrow}A)]$



(8)

$(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (B \rightarrow A))$

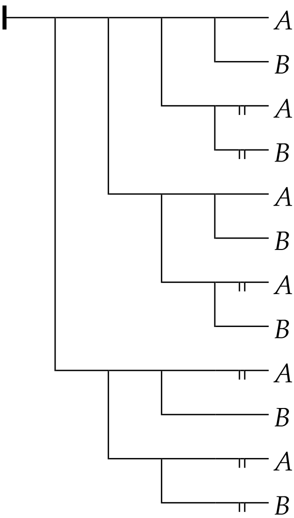
MP 6, 7



(9)

$(B \to \neg\neg A) \to (B \to A)$

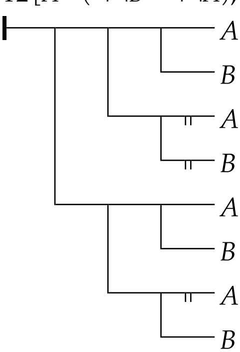
MP 2, 8



(10)

$[(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (B \to \neg\neg A)] \to [((B \to \neg\neg A) \to (B \to A)) \to ((\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (B \to A))]$

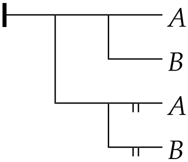
T2 $[A \mapsto (\neg\neg B \to \neg\neg A),\ B \mapsto (B \to \neg\neg A),\ C \mapsto (B \to A)]$



(11)

$[(B \to \neg\neg A) \to (B \to A)] \to [(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (B \to A)]$

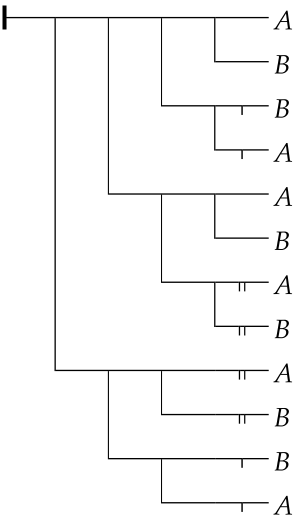
MP 5, 10



(12)

$(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (B \to A)$

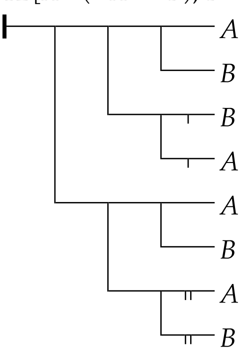
MP 9, 11



(13)

$[(\neg A \to \neg B) \to (\neg\neg B \to \neg\neg A)] \to [((\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (B \to A)) \to ((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))]$

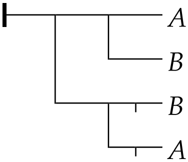
T2 $[A{\mapsto}(\neg A{\to}\neg B),\ B{\mapsto}(\neg\neg B{\to}\neg\neg A),\ C{\mapsto}(B{\to}A)]$



(14)

$[(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (B \to A)] \to [(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)]$

MP 3, 13

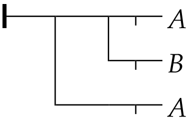


(15)

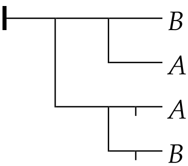
$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ **Q.E.D.**

MP 12, 14

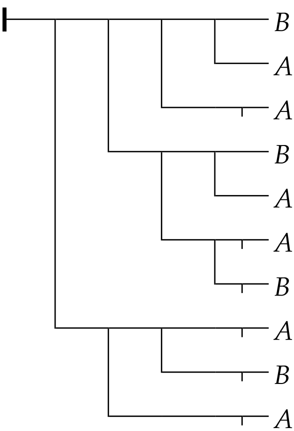
Teorema 10: Ex Falso Quodlibet $\neg A \to (A \to B)$


(1)

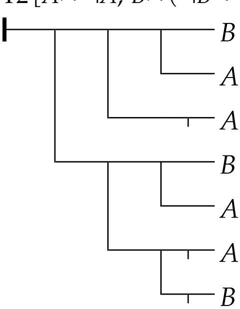
$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$
Ax1 $[A \mapsto \neg A,\ B \mapsto \neg B]$


(2)

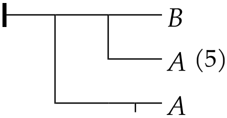
$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
T9 $[A \mapsto B,\ B \mapsto A]$


(3)

$[\neg A \to (\neg B \to \neg A)] \to [((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to (A \to B))]$
T2 $[A \mapsto \neg A,\ B \mapsto (\neg B \to \neg A),\ C \mapsto (A \to B)]$


(4)

$[(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)] \to [\neg A \to (A \to B)]$
MP 1, 3

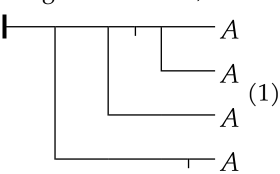


$\neg A \to (A \to B)$ **Q.E.D.**

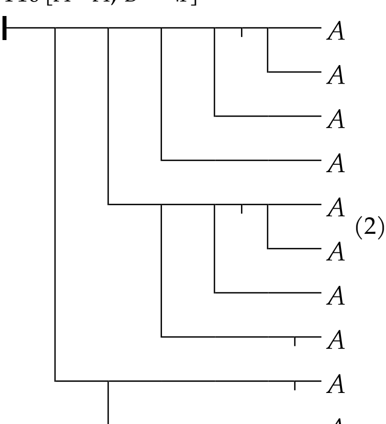
MP 2, 4

Teorema 11: Reductio Ad Absurdum $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

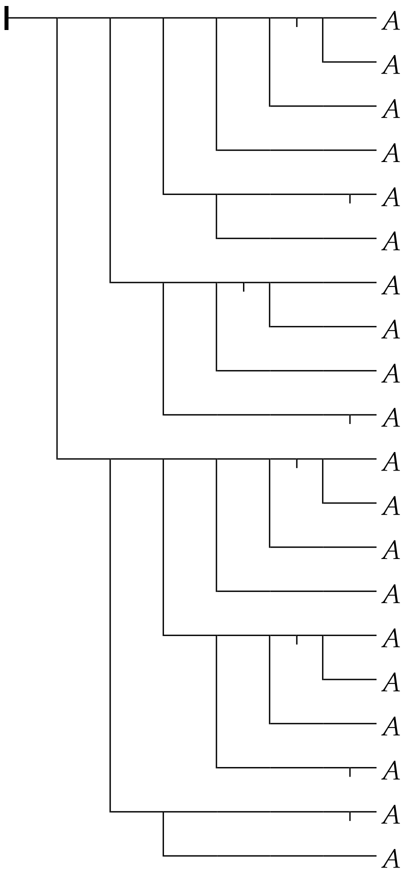
dengan $I \equiv A \to A$, dan lema-bantu $L \equiv (A \to \neg A) \to \neg A$ (selesai pada langkah 19).



$\neg A \to (A \to \neg I)$
T10 $[A{\mapsto}A,\ B{\mapsto}\neg I]$



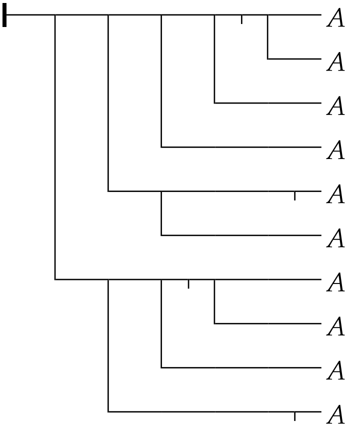
$(A \to \neg A) \to ((\neg A \to (A \to \neg I)) \to (A \to (A \to \neg I)))$
T2 $[A{\mapsto}A,\ B{\mapsto}\neg A,\ C{\mapsto}(A{\to}\neg I)]$



(3)

$((A \to \neg A) \to ((\neg A \to (A \to \neg I)) \to (A \to (A \to \neg I)))) \to ((\neg A \to (A \to \neg I)) \to ((A \to \neg A) \to (A \to (A \to \neg I))))$

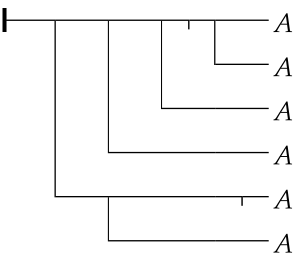
Ax3 $[A \mapsto (A \to \neg A),\ B \mapsto (\neg A \to (A \to \neg I)),\ C \mapsto (A \to (A \to \neg I))]$



(4)

$(\neg A \to (A \to \neg I)) \to ((A \to \neg A) \to (A \to (A \to \neg I)))$

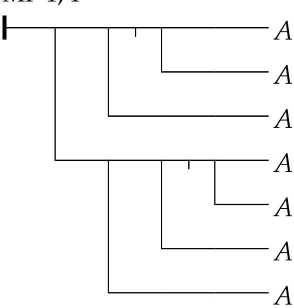
MP 2, 3



(5)

$(A \to \neg A) \to (A \to (A \to \neg I))$

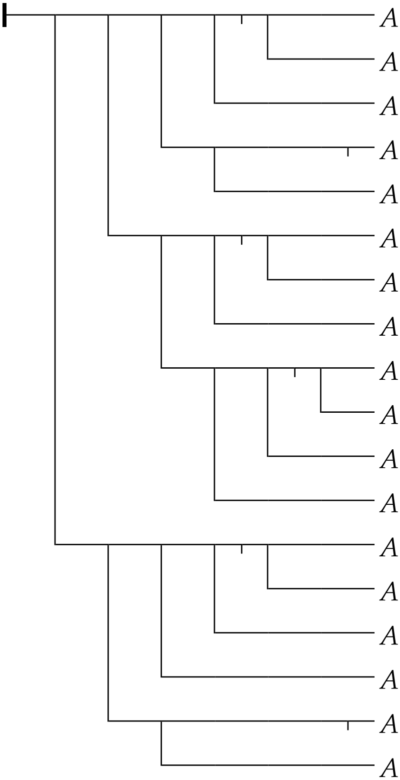
MP 1, 4



(6)

$(A \to (A \to \neg I)) \to (A \to \neg I)$

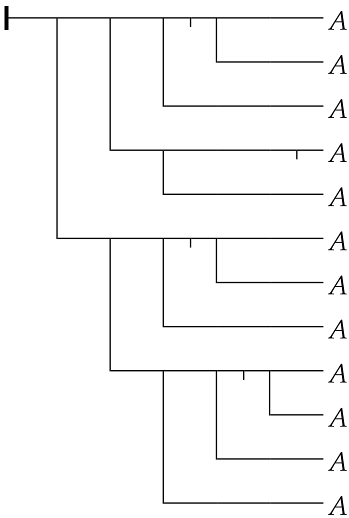
T5 $[A \mapsto A,\ B \mapsto \neg I]$



(7)

$((A \to \neg A) \to (A \to (A \to \neg I))) \to (((A \to (A \to \neg I)) \to (A \to \neg I)) \to ((A \to \neg A) \to (A \to \neg I)))$

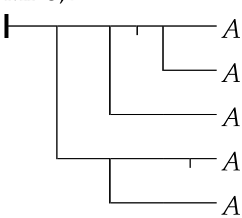
T2 $[A \mapsto (A \to \neg A),\ B \mapsto (A \to (A \to \neg I)),\ C \mapsto (A \to \neg I)]$



(8)

$((A \to (A \to \neg I)) \to (A \to \neg I)) \to ((A \to \neg A) \to (A \to \neg I))$

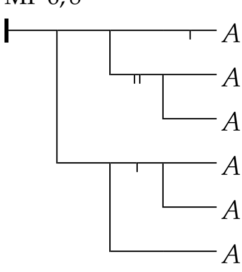
MP 5, 7



(9)

$(A \to \neg A) \to (A \to \neg I)$

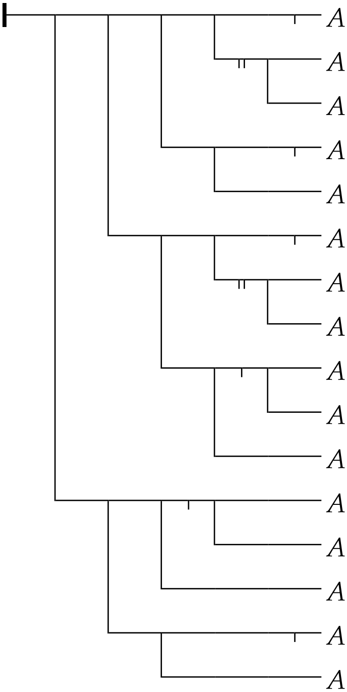
MP 6, 8



(10)

$(A \to \neg I) \to (\neg\neg I \to \neg A)$

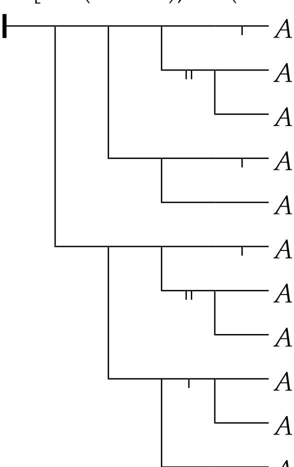
Ax4 [$A \mapsto A$, $B \mapsto \neg I$]



(11)

$((A \to \neg A) \to (A \to \neg I)) \to (((A \to \neg I) \to (\neg\neg I \to \neg A)) \to ((A \to \neg A) \to (\neg\neg I \to \neg A)))$

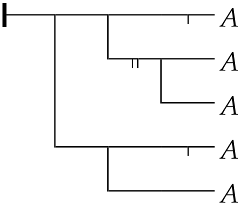
T2 $[A \mapsto (A \to \neg A),\ B \mapsto (A \to \neg I),\ C \mapsto (\neg\neg I \to \neg A)]$



(12)

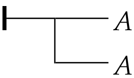
$((A \to \neg I) \to (\neg\neg I \to \neg A)) \to ((A \to \neg A) \to (\neg\neg I \to \neg A))$

MP 9, 11


(13)

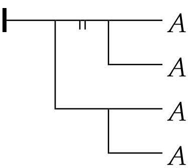
$(A \to \neg A) \to (\neg\neg I \to \neg A)$

MP 10, 12


(14)

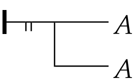
I

T1 $[A \mapsto A]$


(15)

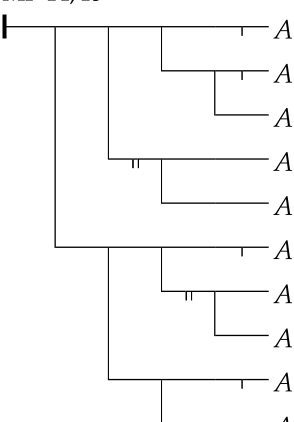
$I \to \neg\neg I$

T7 $[A \mapsto I]$


(16)

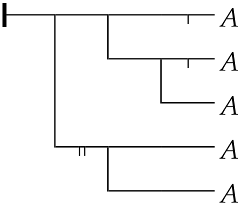
$\neg\neg I$

MP 14, 15


(17)

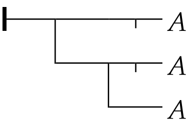
$((A \to \neg A) \to (\neg\neg I \to \neg A)) \to (\neg\neg I \to ((A \to \neg A) \to \neg A))$

Ax3 $[A \mapsto (A \to \neg A),\ B \mapsto \neg\neg I,\ C \mapsto \neg A]$


(18)

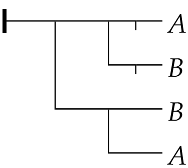
$\neg\neg I \to ((A \to \neg A) \to \neg A)$

MP 13, 17


(19)

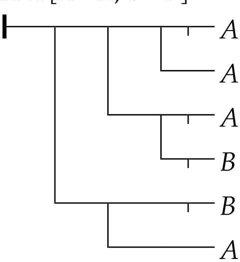
$(A \to \neg A) \to \neg A$

MP 16, 18 (lema L)


(20)

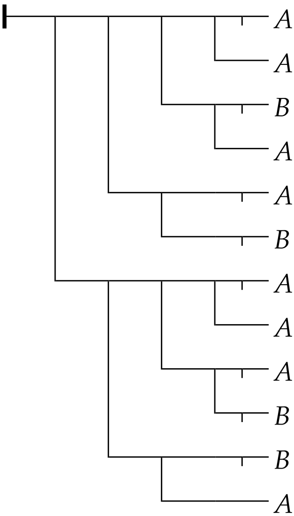
$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Ax4 $[A \mapsto A,\ B \mapsto B]$


(21)

$(A \to \neg B) \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to \neg A))$

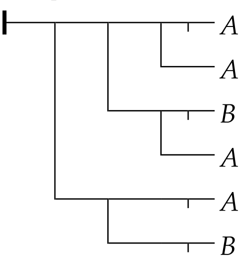
T2 $[A \mapsto A,\ B \mapsto \neg B,\ C \mapsto \neg A]$



(22)

$((A \to \neg B) \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to \neg A))) \to ((\neg B \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)))$

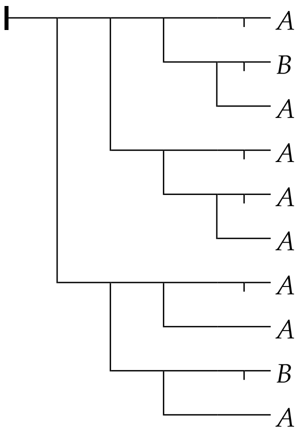
Ax3 $[A \mapsto (A \to \neg B),\ B \mapsto (\neg B \to \neg A),\ C \mapsto (A \to \neg A)]$



(23)

$(\neg B \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to (A \to \neg A))$

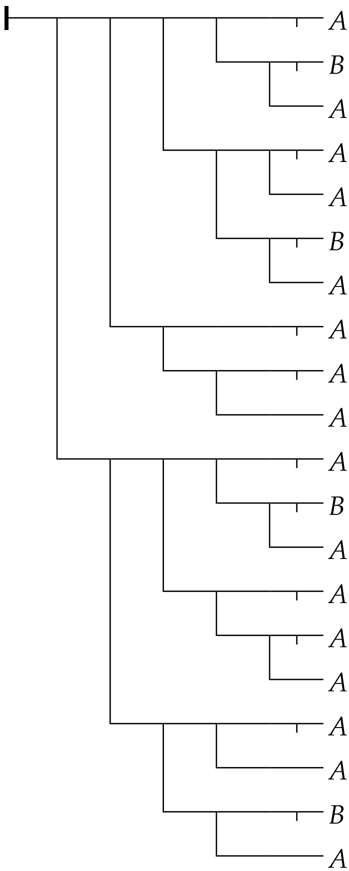
MP 21, 22



(24)

$((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)) \to (((A \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

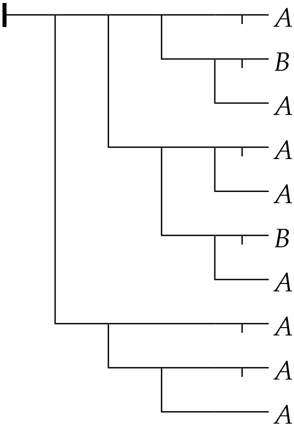
T2 $[A \mapsto (A \to \neg B),\ B \mapsto (A \to \neg A),\ C \mapsto \neg A]$



(25)

$(((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)) \to (((A \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))) \to$
$(((A \to \neg A) \to \neg A) \to (((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)))$

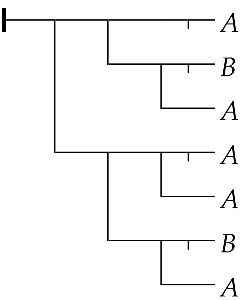
Ax3 $[A \mapsto ((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)),\ B \mapsto L,\ C \mapsto ((A \to \neg B) \to \neg A)]$



(26)

$((A \to \neg A) \to \neg A) \to (((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

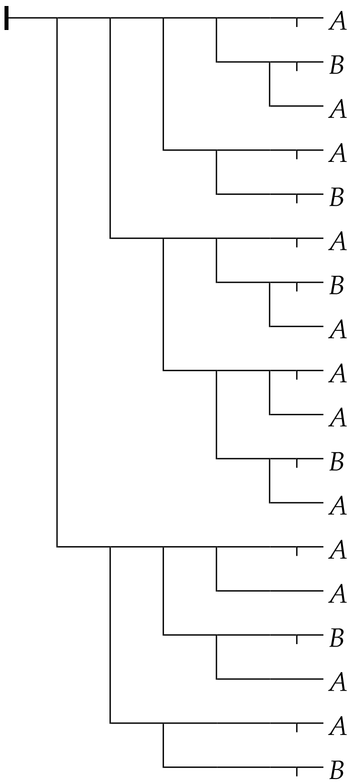
MP 24, 25



(27)

$((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

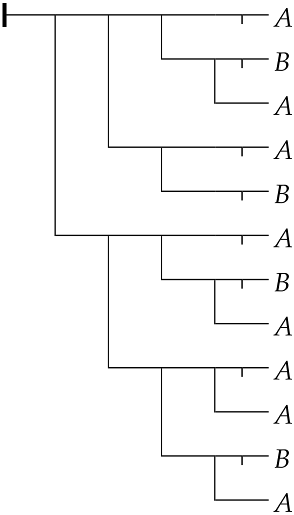
MP 19, 26



(28)

$((\neg B \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to (A \to \neg A))) \to ((((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)) \to ((\neg B \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)))$

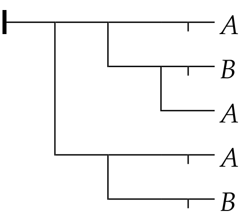
T2 $[A \mapsto (\neg B \to \neg A),\ B \mapsto ((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)),\ C \mapsto ((A \to \neg B) \to \neg A)]$



(29)

$(((A \to \neg B) \to (A \to \neg A)) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)) \to ((\neg B \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

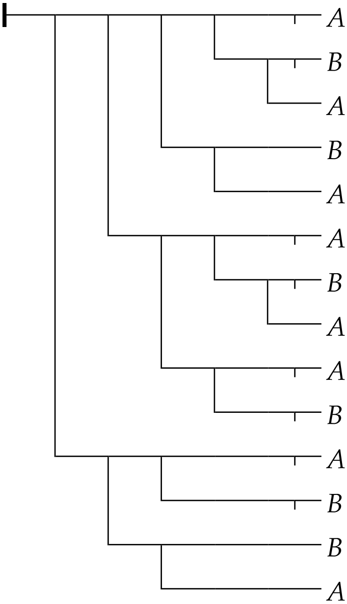
MP 23, 28



(30)

$(\neg B \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

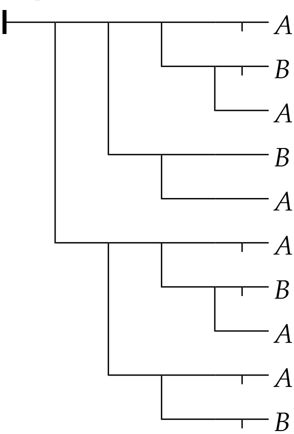
MP 27, 29



(31)

$((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)))$

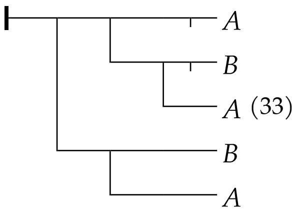
T2 $[A \mapsto (A \rightarrow B),\ B \mapsto (\neg B \rightarrow \neg A),\ C \mapsto ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)]$



(32)

$((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$

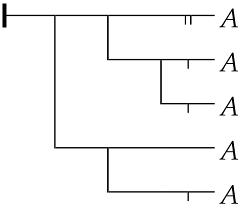
MP 20, 31



$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ **Q.E.D.**

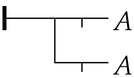
MP 30, 32

Teorema 12: Consequentia Mirabilis $(\neg A \to A) \to A$


(1)

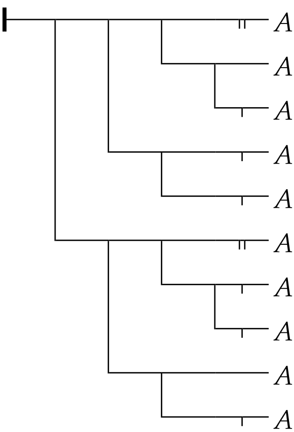
$(\neg A \to A) \to ((\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A)$

T11 $[A{\mapsto}\neg A,\ B{\mapsto}A]$


(2)

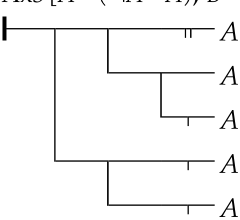
$\neg A \to \neg A$

T1 $[A{\mapsto}\neg A]$


(3)

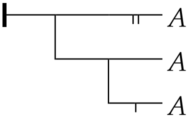
$((\neg A \to A) \to ((\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A)) \to ((\neg A \to \neg A) \to ((\neg A \to A) \to \neg\neg A))$

Ax3 $[A{\mapsto}(\neg A{\to}A),\ B{\mapsto}(\neg A{\to}\neg A),\ C{\mapsto}\neg\neg A]$


(4)

$(\neg A \to \neg A) \to ((\neg A \to A) \to \neg\neg A)$

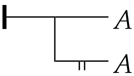
MP 1, 3



(5)

$(\neg A \to A) \to \neg\neg A$

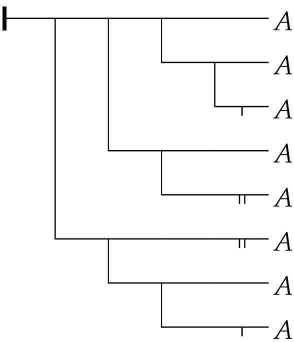
MP 2, 4



(6)

$\neg\neg A \to A$

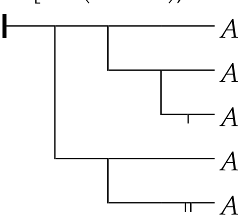
T6 $[A \mapsto A]$



(7)

$((\neg A \to A) \to \neg\neg A) \to ((\neg\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A))$

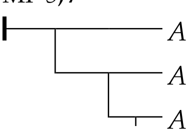
T2 $[A \mapsto (\neg A \to A), B \mapsto \neg\neg A, C \mapsto A]$



(8)

$(\neg\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A)$

MP 5, 7

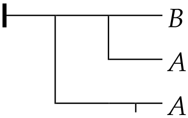


(9)

$(\neg A \to A) \to A$ **Q.E.D.**

MP 6, 8

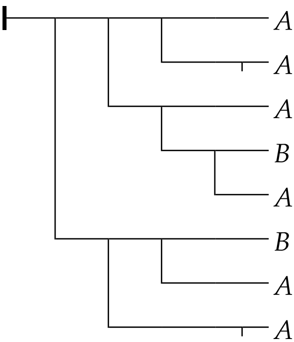
Teorema Peirce $((A \to B) \to A) \to A$



(1)

$\neg A \to (A \to B)$

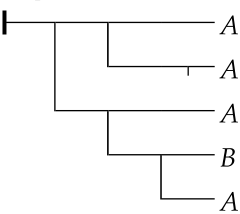
T10 $[A \mapsto A,\ B \mapsto B]$



(2)

$(\neg A \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$

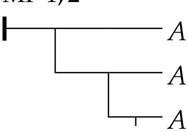
T2 $[A \mapsto \neg A,\ B \mapsto (A \to B),\ C \mapsto A]$



(3)

$((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$

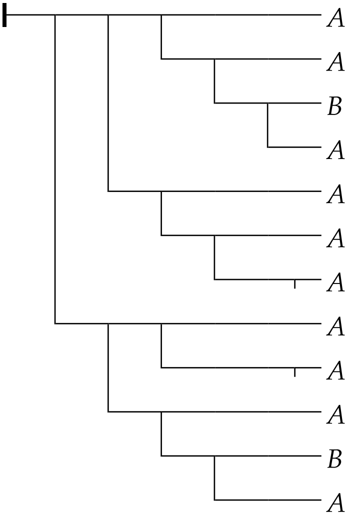
MP 1, 2



(4)

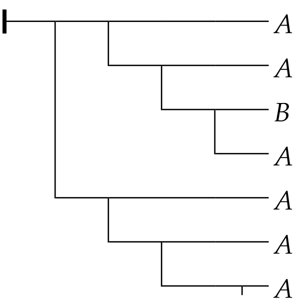
$(\neg A \to A) \to A$

T12 $[A \mapsto A]$


(5)

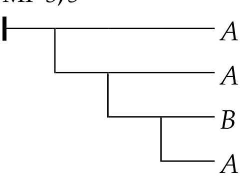
$(((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)) \to (((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A))$

T2 $[A {\mapsto} ((A {\to} B) {\to} A),\ B {\mapsto} (\neg A {\to} A),\ C {\mapsto} A]$


(6)

$((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A)$

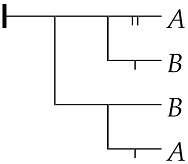
MP 3, 5


(7)

$((A \to B) \to A) \to A$ **Q.E.D.**

MP 4, 6

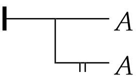
Teorema 14: Transposisi Varian $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$



(1)

$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg A)$

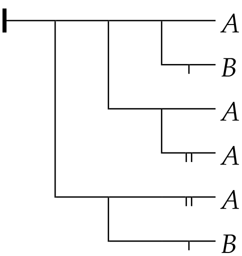
Ax4 $[A \mapsto \neg A,\ B \mapsto B]$



(2)

$\neg\neg A \rightarrow A$

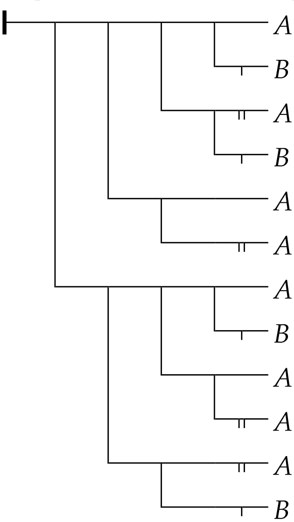
T6 $[A \mapsto A]$



(3)

$(\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A))$

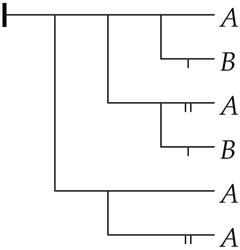
T2 $[A \mapsto \neg B,\ B \mapsto \neg\neg A,\ C \mapsto A]$



(4)

$((\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)))$

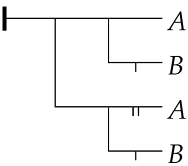
Ax3 $[A \mapsto (\neg B \rightarrow \neg\neg A),\ B \mapsto (\neg\neg A \rightarrow A),\ C \mapsto (\neg B \rightarrow A)]$



(5)

$(\neg\neg A \to A) \to ((\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg B \to A))$

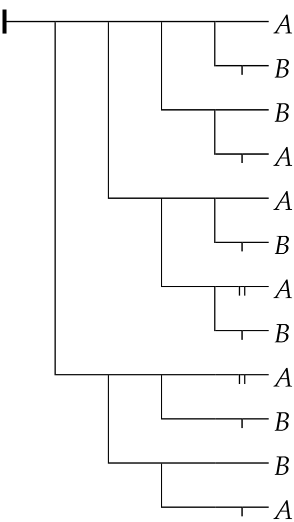
MP 3, 4



(6)

$(\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg B \to A)$

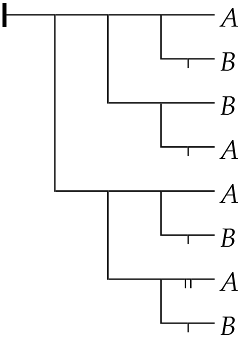
MP 2, 5



(7)

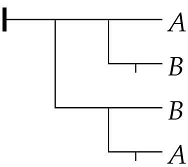
$((\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg\neg A)) \to (((\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg B \to A)) \to ((\neg A \to B) \to (\neg B \to A)))$

T2 $[A \mapsto (\neg A \to B),\ B \mapsto (\neg B \to \neg\neg A),\ C \mapsto (\neg B \to A)]$


(8)

$((\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg B \to A)) \to ((\neg A \to B) \to (\neg B \to A))$

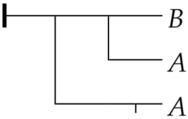
MP 1, 7


(9)

$(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ **Q.E.D.**

MP 6, 8

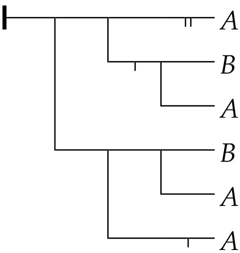
Teorema 15: De Morgan — Eliminasi Anteseden $\neg(A \to B) \to A$



(1)

$\neg A \to (A \to B)$

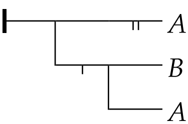
T10 $[A{\mapsto}A,\ B{\mapsto}B]$



(2)

$(\neg A \to (A \to B)) \to (\neg(A \to B) \to \neg\neg A)$

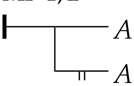
Ax4 $[A{\mapsto}\neg A,\ B{\mapsto}(A{\to}B)]$



(3)

$\neg(A \to B) \to \neg\neg A$

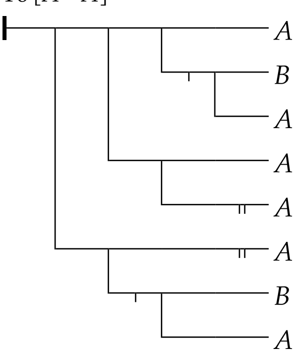
MP 1, 2



(4)

$\neg\neg A \to A$

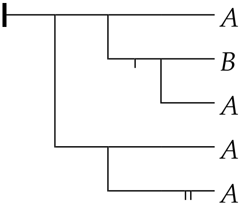
T6 $[A{\mapsto}A]$



(5)

$(\neg(A \to B) \to \neg\neg A) \to ((\neg\neg A \to A) \to (\neg(A \to B) \to A))$

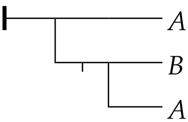
T2 $[A{\mapsto}\neg(A{\to}B),\ B{\mapsto}\neg\neg A,\ C{\mapsto}A]$



(6)

$(\neg\neg A \to A) \to (\neg(A \to B) \to A)$

MP 3, 5

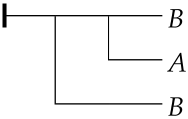


(7)

$\neg(A \to B) \to A$ **Q.E.D.**

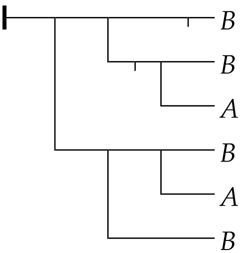
MP 4, 6

Teorema 16: De Morgan — Eliminasi Konsekuen $\neg(A \to B) \to \neg B$



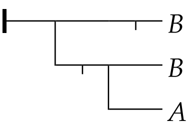
(1)

$B \to (A \to B)$
Ax1 $[A{\mapsto}B,\ B{\mapsto}A]$



(2)

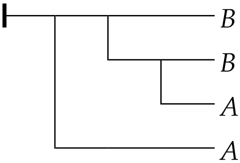
$(B \to (A \to B)) \to (\neg(A \to B) \to \neg B)$
Ax4 $[A{\mapsto}B,\ B{\mapsto}(A{\to}B)]$



(3)

$\neg(A \to B) \to \neg B$ **Q.E.D.**
MP 1, 2

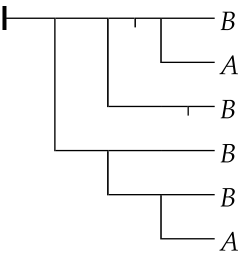
Teorema 17: De Morgan — Introduksi $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$



(1)

$A \to ((A \to B) \to B)$

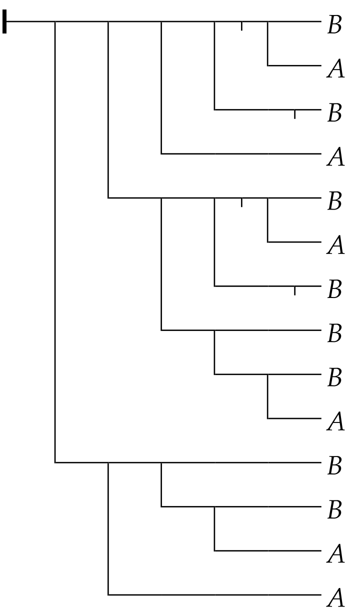
T4 $[A{\mapsto}A,\ B{\mapsto}B]$



(2)

$((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

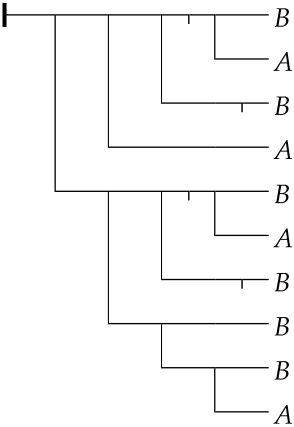
Ax4 $[A{\mapsto}(A{\to}B),\ B{\mapsto}B]$



(3)

$(A \to ((A \to B) \to B)) \to ((((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))) \to (A \to (\neg B \to \neg(A \to B))))$

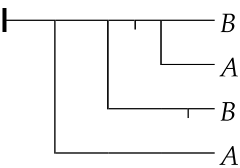
T2 $[A{\mapsto}A,\ B{\mapsto}((A{\to}B){\to}B),\ C{\mapsto}(\neg B{\to}\neg(A{\to}B))]$



(4)

$(((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))) \to (A \to (\neg B \to \neg(A \to B)))$

MP 1, 3



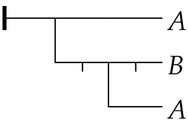
(5)

$A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ **Q.E.D.**

MP 2, 4

Teorema 18: Eksportasi $(A \to (B \to C)) \to (\neg(A \to \neg B) \to C)$

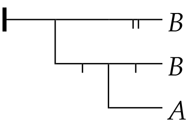
dengan $\Delta \equiv \neg(A \to \neg B)$ (yakni $A \wedge B$ dalam fragmen $\to / \neg$).



(1)

$\Delta \to A$

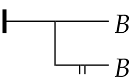
T15 $[A \mapsto A,\ B \mapsto \neg B]$



(2)

$\Delta \to \neg\neg B$

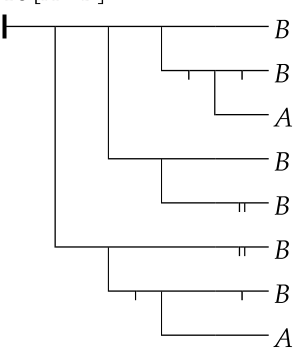
T16 $[A \mapsto A,\ B \mapsto \neg B]$



(3)

$\neg\neg B \to B$

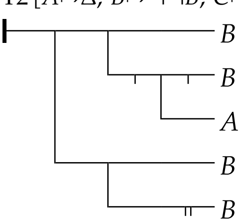
T6 $[A \mapsto B]$



(4)

$(\Delta \to \neg\neg B) \to ((\neg\neg B \to B) \to (\Delta \to B))$

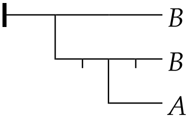
T2 $[A \mapsto \Delta,\ B \mapsto \neg\neg B,\ C \mapsto B]$



(5)

$(\neg\neg B \to B) \to (\Delta \to B)$

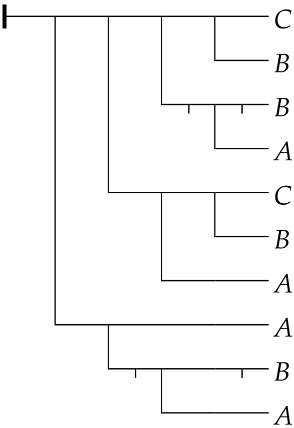
MP 2, 4



(6)

$\Delta \to B$

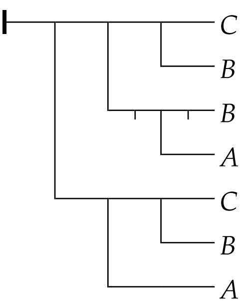
MP 3, 5



(7)

$(\Delta \to A) \to ((A \to (B \to C)) \to (\Delta \to (B \to C)))$

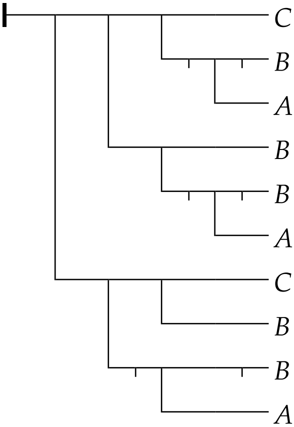
T2 $[A \mapsto \Delta,\ B \mapsto A,\ C \mapsto (B \to C)]$



(8)

$(A \to (B \to C)) \to (\Delta \to (B \to C))$

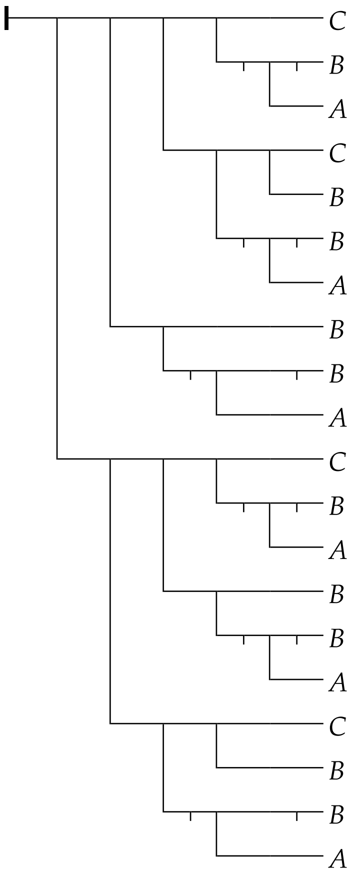
MP 1, 7



(9)

$(\Delta \to (B \to C)) \to ((\Delta \to B) \to (\Delta \to C))$

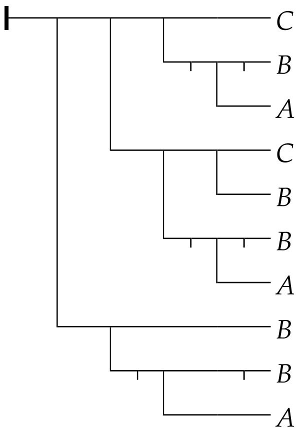
Ax2 $[A \mapsto \Delta,\ B \mapsto B,\ C \mapsto C]$



(10)

$((\Delta \to (B \to C)) \to ((\Delta \to B) \to (\Delta \to C))) \to ((\Delta \to B) \to ((\Delta \to (B \to C)) \to (\Delta \to C)))$

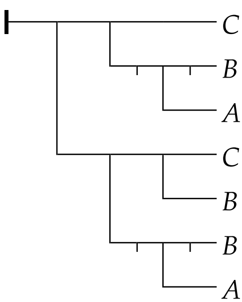
Ax3 $[A \mapsto (\Delta \to (B \to C)),\ B \mapsto (\Delta \to B),\ C \mapsto (\Delta \to C)]$



(11)

$(\Delta \to B) \to ((\Delta \to (B \to C)) \to (\Delta \to C))$

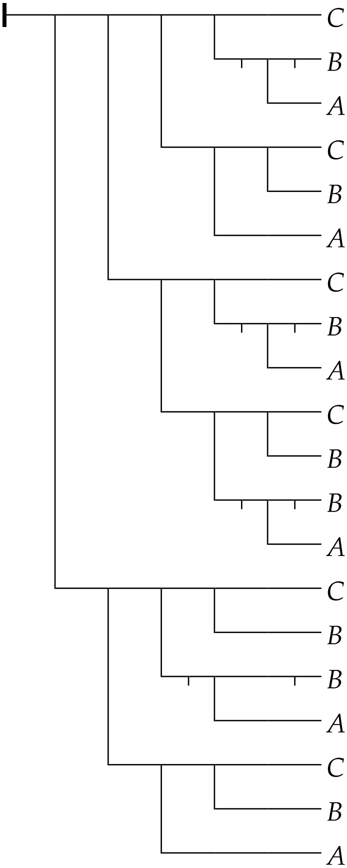
MP 9, 10



(12)

$(\Delta \to (B \to C)) \to (\Delta \to C)$

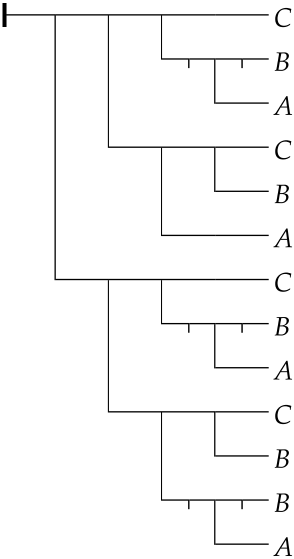
MP 6, 11



(13)

$((A \to (B \to C)) \to (\Delta \to (B \to C))) \to (((\Delta \to (B \to C)) \to (\Delta \to C)) \to ((A \to (B \to C)) \to (\Delta \to C)))$

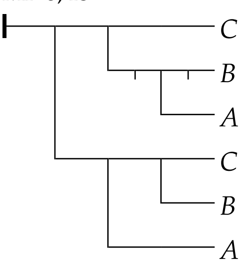
T2 $[A{\mapsto}(A{\to}(B{\to}C)),\ B{\mapsto}(\Delta{\to}(B{\to}C)),\ C{\mapsto}(\Delta{\to}C)]$



(14)

$((\Delta \to (B \to C)) \to (\Delta \to C)) \to ((A \to (B \to C)) \to (\Delta \to C))$

MP 8, 13



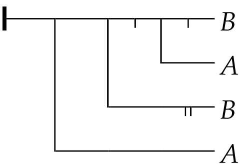
(15)

$(A \to (B \to C)) \to (\Delta \to C)$ **Q.E.D.**

MP 12, 14

Teorema 19: Importasi $(\neg(A \to \neg B) \to C) \to (A \to (B \to C))$

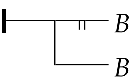
dengan $\Delta \equiv \neg(A \to \neg B)$ (yakni $A \wedge B$ dalam fragmen $\to/\neg$).



(1)

$A \to (\neg\neg B \to \Delta)$

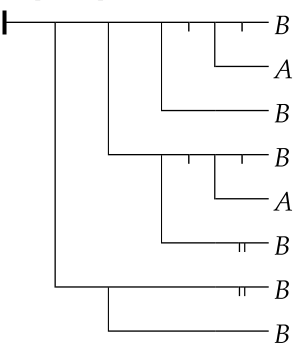
T17 $[A \mapsto A,\ B \mapsto \neg B]$



(2)

$B \to \neg\neg B$

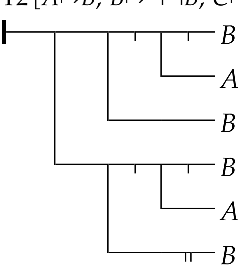
T7 $[A \mapsto B]$



(3)

$(B \to \neg\neg B) \to ((\neg\neg B \to \Delta) \to (B \to \Delta))$

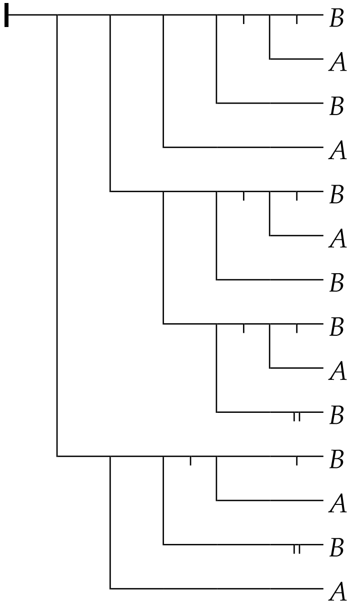
T2 $[A \mapsto B,\ B \mapsto \neg\neg B,\ C \mapsto \Delta]$



(4)

$(\neg\neg B \to \Delta) \to (B \to \Delta)$

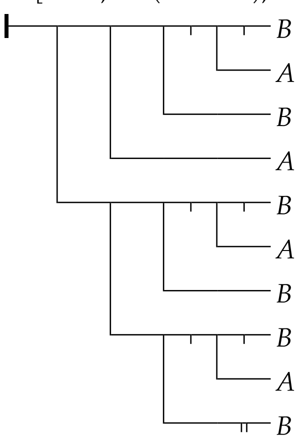
MP 2, 3



(5)

$(A \to (\neg\neg B \to \Delta)) \to (((\neg\neg B \to \Delta) \to (B \to \Delta)) \to (A \to (B \to \Delta)))$

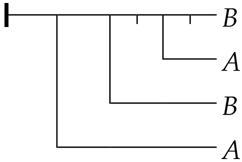
T2 $[A \mapsto A,\ B \mapsto (\neg\neg B \to \Delta),\ C \mapsto (B \to \Delta)]$



(6)

$((\neg\neg B \to \Delta) \to (B \to \Delta)) \to (A \to (B \to \Delta))$

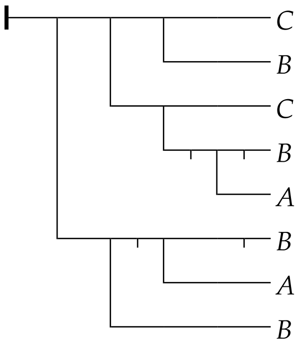
MP 1, 5



(7)

$A \to (B \to \Delta)$

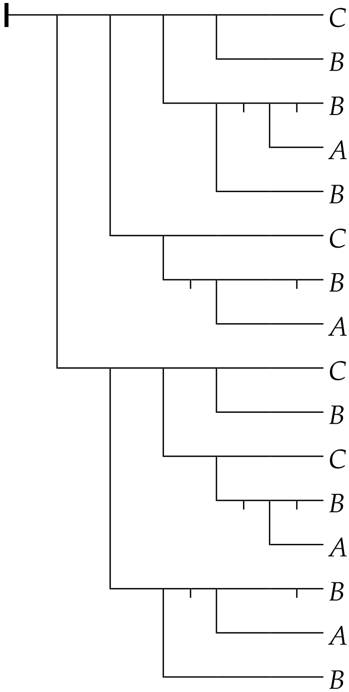
MP 4, 6



(8)

$(B \to \Delta) \to ((\Delta \to C) \to (B \to C))$

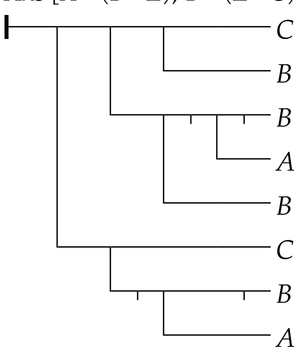
T2 $[A{\mapsto}B,\ B{\mapsto}\Delta,\ C{\mapsto}C]$



(9)

$((B \to \Delta) \to ((\Delta \to C) \to (B \to C))) \to ((\Delta \to C) \to ((B \to \Delta) \to (B \to C)))$

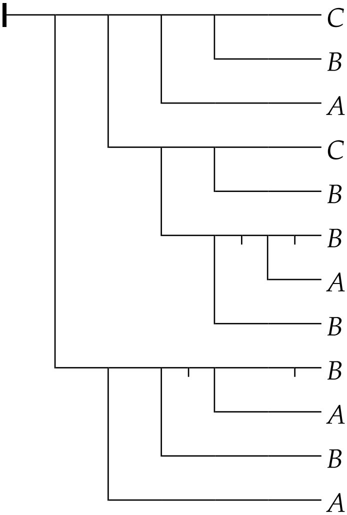
Ax3 $[A \mapsto (B \to \Delta),\ B \mapsto (\Delta \to C),\ C \mapsto (B \to C)]$



(10)

$(\Delta \to C) \to ((B \to \Delta) \to (B \to C))$

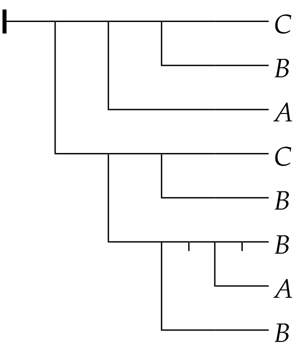
MP 8, 9



(11)

$(A \to (B \to \Delta)) \to (((B \to \Delta) \to (B \to C)) \to (A \to (B \to C)))$

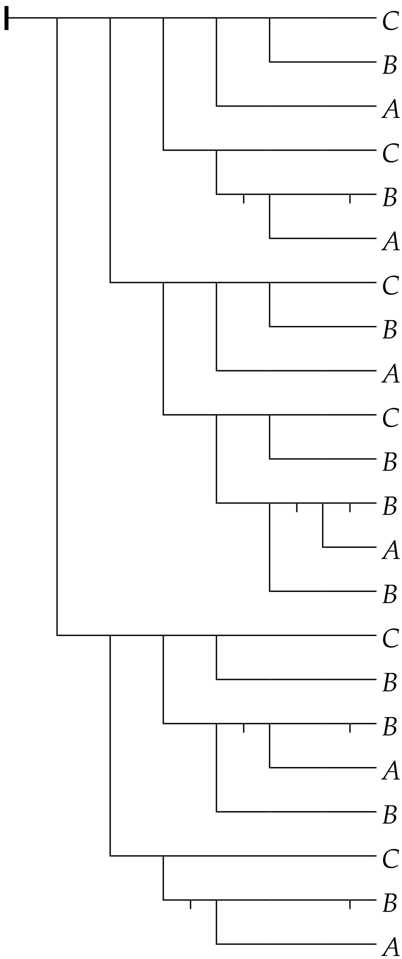
T2 $[A \mapsto A,\ B \mapsto (B \to \Delta),\ C \mapsto (B \to C)]$



(12)

$((B \to \Delta) \to (B \to C)) \to (A \to (B \to C))$

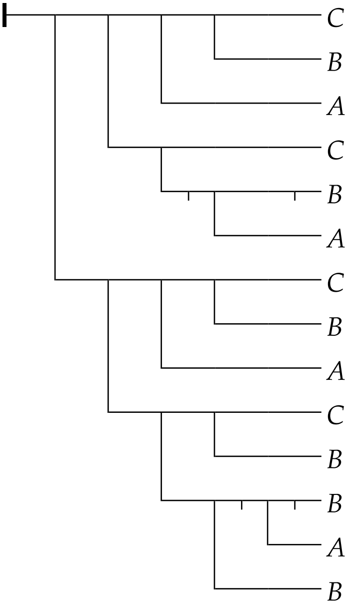
MP 7, 11



(13)

$((\Delta \to C) \to ((B \to \Delta) \to (B \to C))) \to ((((B \to \Delta) \to (B \to C)) \to (A \to (B \to C))) \to ((\Delta \to C) \to (A \to (B \to C))))$

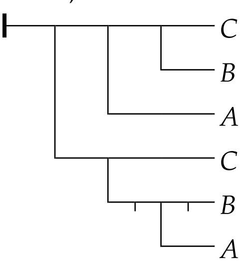
T2 $[A \mapsto (\Delta \to C),\ B \mapsto ((B \to \Delta) \to (B \to C)),\ C \mapsto (A \to (B \to C))]$



(14)

$(((B \to \Delta) \to (B \to C)) \to (A \to (B \to C))) \to ((\Delta \to C) \to (A \to (B \to C)))$

MP 10, 13



(15)

$(\Delta \to C) \to (A \to (B \to C))$ **Q.E.D.**

MP 12, 14

Daftar Pustaka

—Frege, Gottlob (1879) "Begriffsschrift a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought", Van Heijenoort Edition

—Frege, Gottlob, Matthias Wille (2018) "Begriffsschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens" (Klassische Texte der Wissenschaft) (German Edition)

—Korhonen, Anssi (2017) "Frege, the Normativity of Logic, and the Kantian Tradition", New Essays on Frege

—Frege, Gottlob "Boole logical Calculus and the Concept-script" [1880/81]

—Frege, Gottlob "On The Purpose of Begriffsschrift" (1882), Australasian Journal of Philosophy 1968-08, Vol 46 Issue 2

—Frege, Gottlob "Methods of Calculation based on an Extension of the Concept of Quantity" Gottlob Frege, Collected papers on mathematics, logic, and philosophy (1884-1925).